Mines Maths 1 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par François Lê (ENS Lyon) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Le sujet porte sur les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie (au moins 2) qui peuvent s'écrire comme une somme finie de projecteurs. Plus précisément, on montre que ce sont les endomorphismes à trace entière et supérieure à leur rang.

- La première partie demande de retrouver des résultats de cours sur les projecteurs et la trace. En particulier, le but de la question 4 est de montrer que trace et rang d'un projecteur sont égaux. La partie se termine par la preuve que si un endomorphisme est une somme de projecteurs, alors sa trace est entière et supérieure à son rang.
- Dans la courte deuxième partie, on étudie la matrice d'un endomorphisme quelconque dans une base particulière associée à un projecteur de rang 1.
- La troisième partie est plus technique. On y prouve que si un endomorphisme T n'est pas une homothétie et si $t_1, \ldots, t_n$ sont des réels dont la somme est égale à la trace de T, il existe une base dans laquelle la matrice de T a pour éléments diagonaux les réels $t_1, \ldots, t_n$.
- Enfin, la quatrième partie s'attache à montrer que si un endomorphisme est à trace entière et supérieure à son rang, c'est une somme finie de projecteurs. On utilise notamment les résultats de la troisième partie.

Le sujet mélange des questions de cours (numéros 1, 2, 3 et 5) et des questions « classiques » (numéros 4, 11 et 13). Il faut rester vigilant et bien rédiger le tout.

Remarquons que les notations utilisées dans le sujet sont inhabituelles : N(T) pour le noyau d'un endomorphisme T, R(T) pour son image, $\mathbb{T}_{\mathscr{B}}$ pour sa matrice dans une base $\mathscr{B}$. Elles peuvent déstabiliser, mais le correcteur s'attend à ce que vous les employiez.

Indications

Partie 1

4 Utiliser une base de X adaptée à la décomposition obtenue à la question 3 et chercher la matrice de P dans cette base.

6 Chercher une famille génératrice de $\mathrm{F}+\mathrm{G}$ à partir d'une base de F et d'une base de G.

7 Pour l'inégalité $\mathrm{Tr}\ \mathrm{S} \geqslant \mathrm{rg}\ \mathrm{S}$, commencer par montrer, grâce au résultat de la question 6, que si U et V sont des endomorphismes de X, alors $\mathrm{rg}\,(\mathrm{U}+\mathrm{V}) \leqslant \mathrm{rg}\ \mathrm{U}+\mathrm{rg}\ \mathrm{V}$. Procéder ensuite par récurrence sur m en écrivant, pour l'étape d'hérédité,

$$\mathrm{S} = (\mathrm{P}_1 + \mathrm{P}_2 + \cdots + \mathrm{P}_{m-1}) + \mathrm{P}_m$$

afin d'appliquer à S l'inégalité sur le rang d'une somme.

Partie 2

8 Travailler matriciellement dans une base adaptée à la décomposition en somme directe $\mathrm{X} = \mathrm{R(P)} \oplus \mathrm{N(P)}$.

10 Montrer la contraposée en calculant la matrice de $\mathrm{P'TP'}$ dans la base $\mathscr{C}$ obtenue à la question 9.

Partie 3

11 Raisonner par l'absurde en supposant que pour tout $x \in \mathrm{X}$, la famille $(x, \mathrm{T}x)$ est liée. Commencer par montrer que cela implique que pour tout x, $\mathrm{T}x$ est proportionnel à x. Démontrer ensuite que les coefficients de proportionnalité ainsi introduits sont tous égaux.

13 Procéder par récurrence sur n en utilisant la question 12 lors de l'hérédité.

14 Choisir une base $\mathscr{B}$ construite comme à la question 12 pour l'endomorphisme T et considérer les endomorphismes U et T′ définis par $\mathbb{U}_{\mathscr{B}} = \mathrm{Diag}(t_1, t_2)$ et $\mathrm{T}' = \mathrm{T}-\mathrm{U}$. Appliquer ensuite le résultat de la question 13 à T′.

16 Bien que l'énoncé laisse entendre que la récurrence est à initialiser à $n = 3$, on peut avantageusement la faire commencer à $n = 2$, ce cas étant celui traité à la question 14.

Partie 4

18 Commencer par trouver des entiers (positifs) $t_1, \ldots, t_\rho$ de somme Tr T afin de pouvoir appliquer les résultats des questions 14 et 16 à l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la question 17 est $\mathbb{T}_1$. Le fait de choisir des t_i positifs sera utile pour la question suivante.

19 Décomposer la matrice obtenue à la question 18 en une somme de matrices de projecteurs. On pourra avantageusement interpréter chacun des t_i comme la somme $1 + \cdots + 1$ (t_i fois).

20 Se ramener au cas précédent en retranchant à T le projecteur dont la matrice dans la base $\mathscr{B}'$ construite à la question 18 est $\mathrm{Diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

> Signalons que l'utilisation par l'énoncé d'accolades pour désigner des familles de vecteurs est sujette à discussion, puisque de telles familles ne sont pas des ensembles. Pour cette raison, nous utiliserons dans ce corrigé des parenthèses en lieu et place des accolades de l'énoncé.

1. Traces et projecteurs

1 Notons $\mathbb{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $\mathbb{B} = (b_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Pour calculer la trace de $\mathbb{AB}$ et celle de $\mathbb{BA}$, commençons par calculer leurs éléments diagonaux. Avec la formule donnant les termes d'une matrice produit, on a, pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$,

$$(\mathbb{AB})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \qquad \text{et} \qquad (\mathbb{BA})_{ii} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki}.$$

Par conséquent,
$$\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{i=1}^{n} (\mathbb{AB})_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

Cette somme double étant finie, on peut intervertir l'ordre de sommation, de sorte que

$$\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik} b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} (\mathbb{BA})_{kk}$$

soit
$$\boxed{\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \operatorname{Tr}(\mathbb{BA})}$$

2 Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de X et $\mathbb{Q} = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}\mathscr{B}'$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$: on sait que $\mathbb{T}_{\mathscr{B}} = \mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}\mathbb{Q}^{-1}$. En utilisant le résultat de la question 1, il vient

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) &= \operatorname{Tr}(\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}\mathbb{Q}^{-1}) \\
&= \operatorname{Tr}((\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'})\mathbb{Q}^{-1}) \\
&= \operatorname{Tr}(\mathbb{Q}^{-1}(\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'})) \\
&= \operatorname{Tr}(\mathbb{Q}^{-1}\mathbb{Q}\mathbb{T}_{\mathscr{B}'}) \\
\operatorname{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}}) &= \operatorname{Tr}(\mathbb{T}_{\mathscr{B}'})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{La trace de } \mathbb{T}_{\mathscr{B}} \text{ est indépendante de la base } \mathscr{B}.}$

> On prendra garde à ne pas faire dire au résultat de la question 1 ce qu'il ne dit pas : de façon générale, si $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ et $\mathbb{C}$ sont trois matrices, alors $\operatorname{Tr}(\mathbb{ABC})$ prend des valeurs différentes par permutation de $\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$: par exemple, $\operatorname{Tr}(\mathbb{ABC}) \neq \operatorname{Tr}(\mathbb{ACB})$ en général. Il faut donc bien grouper les matrices avant d'utiliser la propriété $\operatorname{Tr}(\mathbb{AB}) = \operatorname{Tr}(\mathbb{BA})$.

3 On peut par exemple montrer que $\mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)} = \{0\}$ et vérifier que l'égalité de dimensions $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{R(P)} + \dim \mathrm{N(P)}$ est vraie.

- Soit $x \in \mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)}$. Comme $x \in \mathrm{R(P)}$, il existe $\xi \in \mathrm{X}$ tel que $x = \mathrm{P}(\xi)$. Alors, puisque $x \in \mathrm{N(P)}$, on a $\mathrm{P}(x) = 0 = \mathrm{P}^2(\xi)$. Or, $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$ car P est un projecteur : ainsi, $0 = \mathrm{P}^2(\xi) = \mathrm{P}(\xi)$, d'où $x = 0$. Cela montre que $\mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)} \subset \{0\}$. Réciproquement, on a bien $0 \in \mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)}$. Ainsi, $\mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)} = \{0\}$.

- D'après la formule du rang, $\dim \mathrm{X} = \dim \mathrm{N(P)} + \mathrm{rg}\ \mathrm{P} = \dim \mathrm{N(P)} + \dim \mathrm{R(P)}$.

En conclusion, $$\boxed{\mathrm{X} = \mathrm{R(P)} \oplus \mathrm{N(P)}}$$

> Une autre façon de faire est de montrer que $\mathrm{R(P)} \cap \mathrm{N(P)} = \{0\}$ et que $\mathrm{X} = \mathrm{R(P)} + \mathrm{N(P)}$. Pour cette dernière égalité, il est aisé de vérifier que si $x \in \mathrm{X}$, il se décompose selon cette somme en $x = \mathrm{P}(x) + (x - \mathrm{P}(x))$. En effet, $\mathrm{P}(x) \in \mathrm{R(P)}$ par définition de l'image de P et $x - \mathrm{P}(x) \in \mathrm{N(P)}$ car $\mathrm{P}(x - \mathrm{P}(x)) = \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}^2(x) = \mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(x) = 0$.

4 Déterminons la matrice de P dans une base adaptée à la décomposition en somme directe obtenue à la question précédente afin de calculer la trace de P.

Soient $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de R(P) et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de N(P). La famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base de X car $\mathrm{X} = \mathrm{R(P)} \oplus \mathrm{N(P)}$. Pour trouver la matrice de P dans cette base, décomposons sur celle-ci chacun des vecteurs $\mathrm{P}(e_i)$, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$. Si $i \in [\![r+1\,;n]\!]$, alors $e_i \in \mathrm{N(P)}$ et il vient immédiatement $\mathrm{P}(e_i) = 0$. Si maintenant $i \in [\![1\,;r]\!]$, alors $e_i \in \mathrm{R(P)}$: il existe f_i appartenant à X tel que $e_i = \mathrm{P}(f_i)$. Dans ce cas, $\mathrm{P}(e_i) = \mathrm{P}^2(f_i) = \mathrm{P}(f_i)$ puisque P est un projecteur. Ainsi, $\mathrm{P}(e_i) = e_i$ lorsque $i \in [\![1\,;r]\!]$. La matrice de P dans la base $\mathscr{B}$ est donc la suivante :

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_r \\ e_{r+1} \\ \vdots \\ e_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc|cccc} \mathrm{P}(e_1) & & & \mathrm{P}(e_r) & \mathrm{P}(e_{r+1}) & & & \mathrm{P}(e_n) \end{array} \\
\left[\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 1 & & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \hline
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{array}\right] \end{array}
= \left[\begin{array}{c|c} \mathbb{I}_r & \mathbb{O} \\ \hline \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{array}\right]$$

D'après la question 2, la trace de P est égale à la trace de la matrice précédente, donc $\mathrm{Tr}\ \mathrm{P} = \mathrm{Tr}\ \mathbb{I}_r = r$. Autrement dit,

$$\boxed{\mathrm{Tr}\ \mathrm{P} = \mathrm{rg}\ \mathrm{P}}$$

5 Traitons d'abord la première égalité proposée, en procédant par double inclusion. Soit d'abord $x \in \mathrm{R(P')}$: il existe $\xi \in \mathrm{X}$ tel que $x = \mathrm{P'}(\xi)$. En se souvenant que $\mathrm{P}^2 = \mathrm{P}$, on obtient

$$\mathrm{P}(x) = \mathrm{P}(\mathrm{P'}(\xi)) = \mathrm{P}(\xi - \mathrm{P}(\xi)) = \mathrm{P}(\xi) - \mathrm{P}(\xi) = 0$$

Ainsi, $x \in \mathrm{N(P)}$ pour tout $x \in \mathrm{R(P')}$, ce qui signifie que $\mathrm{R(P')} \subset \mathrm{N(P)}$.

Réciproquement, soit $x \in \mathrm{N(P)}$. Par définition même de P′, on a $\mathrm{P'}(x) = x - \mathrm{P}(x)$. Or $\mathrm{P}(x) = 0$, ce qui entraîne que $x = \mathrm{P'}(x)$. Par conséquent $x \in \mathrm{R(P')}$ pour tout $x \in \mathrm{N(P)}$. Autrement dit, $\mathrm{N(P)} \subset \mathrm{R(P')}$ et finalement

$$\boxed{\mathrm{R(P')} = \mathrm{N(P)}}$$