CCP Maths 2 PC 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Pauline Tan (ENS Cachan) ; il a été relu par Sylvain De Moor (ENS Cachan) et Antoine Sihrener (Professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur une large partie du programme d'analyse et, dans une moindre mesure, sur celui d'algèbre linéaire. Il introduit le produit de convolution de deux fonctions f et g continues et 2π-périodiques, défini par

$$f * g : x \mapsto \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

Il est composé de trois parties, toutes relatives à l'étude d'un opérateur de la forme $f \longmapsto f * g$ défini dans un premier temps sur l'espace E des fonctions continues et 2π-périodiques à valeurs réelles puis, dans la troisième partie, sur l'espace $\mathcal{C}_{2\pi}$ des fonctions continues et 2π-périodiques à valeurs complexes.

- Dans la première partie, la fonction g est la fonction $|\sin(\cdot/2)|$;
- Dans la deuxième, il s'agit cette fois d'une fonction un peu plus célèbre appelée noyau de Poisson et définie pour un réel r arbitraire dans $]\,0\,;1\,[$ par
$$t \longmapsto \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(t) + 1}$$
- Enfin, dans la troisième partie, on traite le cas d'un élément g quelconque appartenant à $\mathcal{C}_{2\pi}$.

Dans chaque cas, on s'intéresse essentiellement aux coefficients de Fourier et à la régularité de l'image d'un élément f par l'opérateur avant de terminer par une étude du spectre de ce dernier.

La plupart des questions sont des applications très classiques du cours sur les séries de fonctions et sur l'intégration. Toutefois, ce sujet fait aussi appel à des connaissances sur les séries de Fourier, qui ne figurent plus dans le nouveau programme de PC.

Indications

Partie I

I.1.b Montrer que la dérivée de φ n'est pas continue en 0.

I.2.a Calculer les coefficients de Fourier sur l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,]$, intervalle sur lequel $\sin(t/2)$ est positif, puis utiliser une formule d'Euler pour faire apparaître des exponentielles complexes.

I.3 Utiliser la relation de Chasles.

I.4.b Appliquer le théorème de continuité sous le signe somme.

I.5.a Utiliser la question I.3, puis la formule d'addition du sinus.

I.5.b Commencer par montrer grâce au théorème fondamental de l'analyse que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$, puis montrer que sa dérivée g' est elle-même de classe $\mathscr{C}^1$.

I.5.c Exprimer d'abord $c_n(f)$ en fonction de $c_n(g)$ et $c_n(g'')$, puis $c_n(g'')$ en fonction de $c_n(g)$.

I.6.b Appliquer le résultat de la question I.6.a à la fonction f, puis à la fonction f', et exploiter ensuite la linéarité de Φ.

I.6.c Remarquer que $\Phi(f)$ est nécessairement de classe $\mathscr{C}^2$, puis utiliser la question I.5.b pour établir l'injectivité de Φ.

I.7.a Utiliser la question I.5.b pour établir l'équation différentielle demandée.

Partie II

II.1.a Comparer $|p_n(t)|$ au terme général d'une série géométrique indépendante de t.

II.2.b Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues normalement convergente.

II.2.c Appliquer le théorème de dérivation terme à terme.

II.2.d Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions continues normalement convergente. Calculer ensuite les coefficients de Fourier des g_n, en utilisant les formules d'Euler.

II.3.a Utiliser la question II.2.d pour établir une relation entre λ et r.

II.3.b Remarquer que la fonction $\Pi(f)$ est nécessairement de classe $\mathscr{C}^1$.

Partie III

III.1 Appliquer le théorème de continuité sous le signe somme.

III.2.a Effectuer le changement de variable $u = x - t$ dans l'expression de $(g * f)(x)$. Appliquer ensuite le résultat de la question I.3.

III.2.b Raisonner par l'absurde et montrer que $c_n(\varepsilon) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en utilisant la fonction φ introduite à la partie I.

III.3.b Appliquer le théorème de Parseval à la fonction ψ.

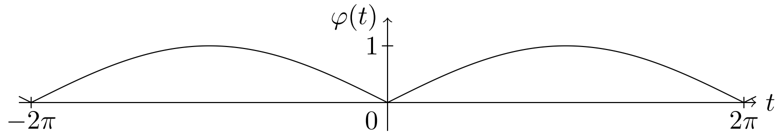
III.3.c Appliquer deux fois le théorème de Parseval.

III.3.d Démontrer séparément la double inclusion demandée.

III.3.e Remarquer que Θ est injectif implique qu'il existe une fonction f non nulle telle que $\Theta(f) = 0 = 0 \times f$.

I. Étude d'un premier opérateur

I.1.a La courbe représentative de la fonction φ sur l'intervalle $[\,-2\pi\,;2\pi\,]$ est donnée par la figure suivante :



I.1.b En tant que composée des fonctions $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto \sin(t/2)$ continues sur $\mathbb{R}$,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Étudions la fonction φ sur chaque intervalle de la forme $]\,2k\pi\,;(2k+2)\pi\,[$, avec k un entier relatif. Si k est pair, alors φ coïncide sur cet intervalle avec $\sin(\cdot/2)$, qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle fermé $[\,2k\pi\,;(2k+2)\pi\,]$, de dérivée $t \longmapsto \cos(t/2)/2$. On en déduit que la restriction de la fonction φ sur $]\,2k\pi\,;(2k+2)\pi\,[$ est prolongeable en une fonction $\mathscr{C}^1$. Le cas où k est impair est similaire, φ coïncidant alors avec la fonction $-\sin(\cdot/2)$.

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ par morceaux.}}$$

En revanche, ainsi que sa courbe représentative donnée à la question I.1.a le suggère, sa dérivée n'est pas continue en 0. En effet,

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \varphi'(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t>0}} \frac{\cos(t/2)}{2} = \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} \varphi'(t) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t<0}} -\frac{\cos(t/2)}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ainsi, $$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ n'est pas de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

I.2.a Soit $t \in \mathbb{R}$. La formule d'addition du sinus assure que

$$\varphi(t+2\pi) = \left|\sin\left(\frac{t+2\pi}{2}\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}+\pi\right)\right| = \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| = \varphi(t)$$

On en déduit que la fonction φ est 2π-périodique. Ses coefficients de Fourier exponentiels sont donnés par

$$\forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t$$

car le sinus est positif sur $[\,0\,;\pi\,]$. La formule d'Euler

$$\sin(t) = \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}}{2\,\mathrm{i}}$$

valable pour tout réel t, entraîne alors

$$\begin{aligned}
c_n(\varphi) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1/2+n)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\left[\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)t}}{\mathrm{i}(1/2-n)} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1/2+n)t}}{\mathrm{i}(1/2+n)}\right]_0^{2\pi} \\
c_n(\varphi) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)2\pi}}{\mathrm{i}(1/2-n)} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1/2+n)2\pi}}{\mathrm{i}(1/2+n)} - \frac{1}{\mathrm{i}(1/2-n)} - \frac{1}{\mathrm{i}(1/2+n)}\right)
\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(1/2-n)2\pi} = \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}(1/2+n)2\pi} = -1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on en déduit que

$$\begin{aligned} c_n(\varphi) &= \frac{1}{4\,\mathrm{i}\pi}\left(-\frac{2}{\mathrm{i}(1/2-n)} - \frac{2}{\mathrm{i}(1/2+n)}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{1/2-n} + \frac{1}{1/2+n}\right) \\ c_n(\varphi) &= \frac{1}{2\pi} \times \frac{1}{1/4-n^2} \end{aligned}$$

soit finalement $$\boxed{\forall\, n \in \mathbb{Z} \qquad c_n(\varphi) = \frac{2}{\pi(1-4n^2)}}$$

La fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ d'après la question I.1.b, le théorème de convergence normale assure que

$$\boxed{\text{La série de Fourier de } \varphi \text{ converge normalement vers } \varphi \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

I.2.b La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, on peut donc appliquer le théorème de Dirichlet qui assure que, pour tout t appartenant à $\mathbb{R}$, la série $\sum(c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt} + c_{-n}(\varphi)\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt})$ converge et que

$$\varphi(t) = c_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{+\infty} (c_n(\varphi)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}nt} + c_{-n}(\varphi)\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt})$$

En particulier, si $t = 0$, puisque $c_n(\varphi) = c_{-n}(\varphi) = 2/\big(\pi(1-4n^2)\big)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$,

$$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{4n^2-1} \text{ converge.}}$$

Sa somme est donnée par

$$\varphi(0) = c_0(\varphi) + \sum_{n=1}^{+\infty} \big(c_n(\varphi) + c_{-n}(\varphi)\big) = \frac{2}{\pi} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

avec $\varphi(0) = 0$. On en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}}$$

Pour calculer la seconde somme, appliquons la formule de Parseval : la fonction φ étant continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique, la série $\sum(|c_n(\varphi)|^2 + |c_{-n}(\varphi)|^2)$ converge. Puisque

$$|c_n(\varphi)|^2 = |c_{-n}(\varphi)|^2 = \frac{4}{\pi^2(1-4n^2)^2}$$

il s'ensuit que $$\boxed{\text{La série } \sum \frac{1}{(4n^2-1)^2} \text{ converge.}}$$

> Pour prouver la convergence de ces deux séries à termes positifs, on peut également utiliser la comparaison avec les séries de Riemann ; en effet,
>
> $$\frac{1}{4n^2-1} \sim \frac{1}{4n^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(4n^2-1)^2} \sim \frac{1}{16n^4}$$
>
> où les séries $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/(4n^2)$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} 1/(16n^4)$ convergent car $2 > 1$ et $4 > 1$.