X Maths B MP 2014 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Antoine Sihrener (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Walter Appel (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (Professeur en CPGE).

Ce sujet a pour but d'établir des propriétés de l'exponentielle de matrices.

- La première partie traite de l'exponentielle sur l'ensemble des matrices de taille 3 triangulaires supérieures strictes. On donne le produit de deux exponentielles de telles matrices et on finit par démontrer que l'exponentielle est un isomorphisme de groupes. Les questions de cette partie sont assez abordables et ne consistent qu'à faire des produits de matrices et à montrer que des ensembles sont des groupes, mais il faut faire attention à ne pas se lancer tête baissée dans certains calculs, qui peuvent être évités avec des propriétés de symétrie et qui sinon prendraient énormément de temps.
- La deuxième partie étudie l'exponentielle des matrices de taille quelconque d. On donne d'abord $\exp(\mathrm{A})\exp(\mathrm{B})$, dans le cas où A et B commutent avec leur commutateur $[\mathrm{A},\mathrm{B}] = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}$, en résolvant une équation linéaire matricielle à coefficients constants. Le reste de la partie a pour but d'établir le résultat suivant, appelé formule de Lie :
$$\left(\exp\left(\frac{\mathrm{A}}{n}\right)\exp\left(\frac{\mathrm{B}}{n}\right)\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(\mathrm{A}+\mathrm{B})$$
pour des matrices A et B qui sont maintenant quelconques. Cette partie est plus difficile et demande d'être à l'aise avec les majorations.
- Enfin, la troisième et dernière partie a pour cadre la théorie du contrôle. On étudie ce qu'on appelle des « chemins de Carnot contrôlés par deux fonctions u et v », encore une fois pour des matrices de taille 3. On s'intéresse aux matrices qui sont à une extrémité de tels chemins, et on finit par donner un encadrement de la « durée de vie » d'un tel chemin. En clair, on résout des équations différentielles sur des matrices 3×3, et on s'intéresse à l'intervalle de définition des solutions, ainsi que de leurs valeurs aux bornes. Cette dernière partie introduit un vocabulaire nouveau, avec lequel il est toujours difficile de se familiariser en temps limité, mais derrière lequel se cachent des questions plus concrètes : la plupart des questions de cette partie sont des calculs sur $\mathbb{R}$ ou des systèmes 3×3 à résoudre. Elle est tout de même difficile et calculatoire.

En conclusion, c'est un problème utilisant des chapitres variés, la difficulté est progressive, et les résultats sont souvent donnés dans l'énoncé, de sorte qu'un candidat n'arrivant pas à faire une question est rarement bloqué pour la suite. Il faut enfin être efficace sur les calculs car ils peuvent prendre beaucoup de temps et empêcher d'atteindre les questions où un raisonnement plus fin est attendu.

Indications

Première partie

1 Voir que la matrice $\mathrm{M}_{p,q,r}$ est nilpotente.

2.a Pour l'associativité, voir qu'un produit de trois éléments de $\mathbf{L}$ est nul.

2.b Calculer $\mathrm{M}_{a,b,c}*\mathrm{M}_{p,q,r}$ et $\mathrm{M}_{p,q,r}*\mathrm{M}_{a,b,c}$ pour tous réels a, b, c, p, q, r et comparer les matrices obtenues.

3 Utiliser le fait que $\mathrm{M}*\mathrm{N}$ est un élément de $\mathbf{L}$ que l'on connaît (en utilisant la question 2.a), et utiliser la première question.

4 Utiliser la question précédente, ne surtout pas faire le calcul ! Montrer enfin que $(\mathrm{M}*\mathrm{N})$ et $((-\mathrm{M})*(-\mathrm{N}))$ commutent.

5 Pour la bijectivité, résoudre l'équation $\exp(\mathrm{M}_{a,b,c}) = \mathrm{I}_3 + \mathrm{M}_{p,q,r}$.

Deuxième partie

6.a Écrire les deux quantités de l'énoncé sous forme d'une somme.

6.b Dériver φ, et utiliser la question précédente pour donner une autre expression de $\exp(t\mathrm{A})\mathrm{B}$, puis montrer que $\exp(t\mathrm{A})$ et $[\mathrm{A},\mathrm{B}]$ commutent.

6.c Résoudre l'équation différentielle de la question précédente et prendre $t = 1$.

7.a Montrer que le commutateur est une application bilinéaire, développer, et utiliser le fait que celui-ci est nul si les deux matrices commutent.

7.b Appliquer la question 6.c à M et N.

8.a Pour le calcul de la limite, utiliser la formule du binôme de Newton, puis rajouter le reste de la série donnant $\exp(\lambda)$, couper en un n_0 bien choisi, et ensuite seulement faire tendre n vers $+\infty$.

8.b Introduire le terme $\mathrm{D}_n\mathrm{D}^k$ et faire une récurrence sur k.

8.c Introduire $\exp(\mathrm{D})$ dans la limite apparaissant à la question 8.a, couper la somme infinie en n, factoriser, et montrer que deux des trois membres tendent vers 0.

9.a Utiliser l'inégalité triangulaire.

9.b Poser $\mathrm{E}_n = \exp\left(\dfrac{\mathrm{A}}{n}\right) - \mathrm{I}_d - \dfrac{\mathrm{A}}{n}$ et $\mathrm{F}_n = \exp\left(\dfrac{\mathrm{B}}{n}\right) - \mathrm{I}_d - \dfrac{\mathrm{B}}{n}$

et faire le produit de l'énoncé. Poser la matrice C_n qui conviendrait et appliquer la question précédente pour borner E_n et F_n, avec $n \geqslant n_0$ tel que $\|\mathrm{A}/n\|$ et $\|\mathrm{B}/n\|$ soient inférieures à 1. Trouver enfin ν qui convient pour $n < n_0$.

10 Mettre A, B et C_n sur n et poser $\mathrm{D}_n = \mathrm{A}+\mathrm{B}+n\mathrm{C}_n$ pour utiliser la question 8.c.

Troisième partie

11.a C'est une question de cours.

11.b Résoudre l'équation différentielle de l'énoncé, en n'oubliant pas la condition initiale. Le système 9×9 est plus facile qu'il n'y paraît !

12.a Remarquer que $r(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \Big(v(x)p(x) - u(x)q(x)\Big)\,\mathrm{d}x$.

13 Remarquer qu'on peut écrire f à l'aide du sinus cardinal, et étudier les variations de cette fonction. Pour g, dériver normalement, chercher les points où g' s'annule, pour cela utiliser la stricte convexité de la fonction tangente sur l'intervalle $[\,0\,;\pi/2\,[$. Se souvenir du signe de la tangente, et ne pas oublier de préciser qu'une quantité est non nulle avant de diviser. Utiliser enfin les formules donnant $\cos(s)$ et $\sin(s)$ en fonction de $\cos(s/2)$ et $\sin(s/2)$.

14 Utiliser les formules donnant $\cos(a)-\cos(b)$ et $\sin(a)-\sin(b)$ et mettre p et q au carré. Séparer les cas $r=0$ et $r\neq 0$. Préciser pourquoi φ appartient à l'intervalle $[\,0\,;2\pi\,]$. Pour la réciproque, séparer les cas $\varphi=2\pi$ et $\varphi\neq 2\pi$, puis utiliser le fait que

$$a^2+b^2=1 \qquad \Longrightarrow \qquad \exists\,\alpha\in\mathbb{R} \qquad a=\sin(\alpha) \quad \text{et} \quad b=\cos(\alpha)$$

15 Montrer que si $(p,q,r)\in \mathrm{B}(1)$ avec $r<0$ alors $r=-g\circ f^{-1}\left(p^2+q^2\right)$. Écrire $p^2+q^2+|r|$ comme une fonction continue prise en p^2+q^2.

16.a Ne pas oublier les cas particuliers $r=0$ et $p^2+q^2=0$. Dans le cas général, appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à L définie par

$$\mathrm{L}(x)=rx-g\circ f^{-1}\left(x\left(p^2+q^2\right)\right)$$

Montrer ensuite que $g\circ f^{-1}$ est concave en la dérivant deux fois (ne surtout pas remplacer ces fonctions ni leurs dérivées par leurs valeurs). Faire apparaître g'/f' et simplifier son expression à l'aide de formules de trigonométrie pour faire apparaître la fonction cotangente.

16.b Appliquer la question précédente, donner les valeurs de p,q et r, et chercher les paramètres $\mathrm{T(A)},\theta$ et φ permettant d'avoir l'expression de la question 12.a.

16.c Appliquer les trois questions précédentes.

Première partie

1 Soit $(p,q,r)\in\mathbb{R}^3$. Calculons les puissances successives de $\mathrm{M}_{p,q,r}$. Tout d'abord,

$$\mathrm{M}_{p,q,r}{}^2 = \begin{pmatrix}0 & p & r\\ 0 & 0 & q\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & p & r\\ 0 & 0 & q\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & pq\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ensuite, $\mathrm{M}_{p,q,r}{}^3 = 0_3$ et, pour tout $n \geqslant 3$

$$\mathrm{M}_{p,q,r}{}^n = \mathrm{M}_{p,q,r}{}^3\mathrm{M}_{p,q,r}{}^{n-3} = 0_3$$

Ainsi, la somme définissant l'exponentielle de la matrice $\mathrm{M}_{p,q,r}$ est finie et

$$\boxed{\exp(\mathrm{M}_{p,q,r}) = \mathrm{I}_3 + \mathrm{M}_{p,q,r} + \frac{\mathrm{M}_{p,q,r}{}^2}{2} = \begin{pmatrix}1 & p & r+\dfrac{pq}{2}\\ 0 & 1 & q\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}$$

2.a Montrons que $(\mathbf{L},*)$ est un groupe.

- Montrons que $*$ est une loi interne de $\mathbf{L}$. Soit $(p,q,r,a,b,c)\in\mathbb{R}^6$.

$$\mathrm{M}_{p,q,r}\mathrm{M}_{a,b,c} = \begin{pmatrix}0 & 0 & pb\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

et $$\mathrm{M}_{a,b,c}\mathrm{M}_{p,q,r} = \begin{pmatrix}0 & 0 & aq\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$\mathrm{M}_{p,q,r} * \mathrm{M}_{a,b,c} = \begin{pmatrix}0 & a+p & c+r+\dfrac{1}{2}(pb-aq)\\ 0 & 0 & q+b\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \in \mathbf{L} \qquad (1)$$

Il en découle que $*$ est interne dans $\mathbf{L}$.

- Montrons que la loi $*$ est associative dans $\mathbf{L}$. Soient $\mathrm{M},\mathrm{N},\mathrm{P}$ trois éléments de $\mathbf{L}$. Par définition de la loi $*$,

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}*\mathrm{N})*\mathrm{P} &= \left(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\frac{1}{2}(\mathrm{MN}-\mathrm{NM})\right)*\mathrm{P}\\
&= \mathrm{M}+\mathrm{N}+\frac{1}{2}(\mathrm{MN}-\mathrm{NM})+\mathrm{P}+\frac{1}{2}\left[\left(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\frac{1}{2}(\mathrm{MN}-\mathrm{NM})\right)\mathrm{P}\right.\\
&\qquad\left.-\mathrm{P}\left(\mathrm{M}+\mathrm{N}+\frac{1}{2}(\mathrm{MN}-\mathrm{NM})\right)\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{M}*\mathrm{N})*\mathrm{P} &= \mathrm{M}+\mathrm{N}+\mathrm{P}+\frac{1}{2}(\mathrm{MN}-\mathrm{NM}+\mathrm{MP}+\mathrm{NP}-\mathrm{PM}-\mathrm{PN})\\
&\qquad+\frac{1}{4}(\mathrm{MNP}-\mathrm{NMP}-\mathrm{PMN}+\mathrm{PNM})\end{aligned}$$