Mines Maths 1 PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Samuel Baumard (ENS Ulm) ; il a été relu par Jules Svartz (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Cette épreuve porte sur une méthode de calcul numérique des valeurs propres d'une matrice symétrique réelle par le biais d'équations différentielles.

- Dans la première partie, on construit un algorithme permettant de réduire le problème aux matrices tridiagonales symétriques réelles, dites de Jacobi, grâce aux matrices de la forme $\mathrm{I} - 2\,u\,{}^t u$ où u est un vecteur unitaire, dites de Householder.
- La deuxième partie est consacrée à montrer que les matrices de Jacobi dont les coefficients proches de la diagonale sont non nuls ont des valeurs propres distinctes.
- La troisième partie relève des systèmes d'équations différentielles : à une matrice de Jacobi T_0 sont associées deux familles de matrices à un paramètre, $\mathrm{T}(t)$ et $\mathrm{U}(t)$, reliées par un système différentiel. L'intérêt est que les matrices $\mathrm{T}(t)$ ont pour tout t le même spectre que la matrice T_0.
- Dans la quatrième partie, on exploite le système différentiel de la troisième partie pour prouver que la matrice $\mathrm{T}(t)$ converge, lorsque t tend vers l'infini, vers une matrice diagonale donnant les valeurs propres de T_0 (questions 12 à 17), et que cette convergence est exponentielle (questions 18 à 21).

Mêlant réduction des matrices symétriques et équations différentielles, ce problème constitue un bon sujet de révision. Attention néanmoins : l'énoncé n'est pas exempt de petites erreurs et d'imprécisions parfois troublantes. Soyez-y attentif, et, en situation de concours, signalez dans la copie les erreurs remarquées, si celles-ci sont manifestes.

Indications

Partie 1

1 Se souvenir que si u et v sont deux vecteurs colonnes, la matrice ${}^t u\, v$ est de taille 1 et son seul coefficient vaut $(u \mid v)$.

3 Commencer par calculer $(u \mid g)$.

5 Utiliser le résultat de la question 2, puis expliciter la décomposition par blocs de la matrice $\widehat{\mathrm{S}}$.

6 Montrer qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathcal{O}_{m-1}(\mathbb{R})$ telle qu'en posant

$$\widehat{\mathrm{P}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & \mathrm{P} \end{array}\right)$$

la matrice ${}^t\widehat{\mathrm{P}}\ \widehat{\mathrm{Q}}\,\widehat{\mathrm{P}}$ soit tridiagonale.

Partie 2

7 Écrire explicitement les relations vérifiées par les ξ_j.

8 Cela revient à prouver que deux vecteurs d'un tel sous-espace sont colinéaires.

Partie 3

9 Cette question semble faire appel à un théorème général d'existence de solutions aux systèmes différentiels qui, bien qu'intuitif, n'est plus au programme de PC.

10 Commencer par dériver le produit ${}^t\mathrm{V}\,\mathrm{V}$.

Partie 4

13 Dériver la somme et exploiter les relations (7).

14 Intégrer la seconde relation du système (7). Attention à ne pas oublier le cas $i = m$.

15 Multiplier la première relation de (7) par $\alpha_i(t)$.

16 Le déterminant d'une matrice est une fonction polynomiale des coefficients.

18 Utiliser le fait que la borne inférieure peut être vue comme une limite, et le théorème des valeurs intermédiaires.

19 Combiner le système (7) et le résultat de la question 12, puis prendre la limite pour t croissant vers τ.

21 Attention à l'interversion flagrante du « pour $t > \mathrm{S}$ » et du « $\exists\, \mathrm{C}' > 0$ ».

Dans tout le corrigé, la notation $\|\cdot\|$ désignera la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^m$.

1. Tridiagonalisation

1 Si u et v sont deux vecteurs, la matrice ${}^t u\, v$ est de taille 1 et son seul coefficient vaut $(u \mid v)$, par définition même du produit scalaire. De ce fait, par associativité du produit matriciel, et puisque u est unitaire,

$$\mathrm{H}\, u = u - 2\, u\, {}^t u\; u = u - 2\, u\, (u \mid u) = u - 2\, u$$

soit $$\boxed{\mathrm{H}\, u = \; -u}$$

De même, si v est orthogonal à u, le produit scalaire $(u \mid v)$ est nul et par conséquent

$$\mathrm{H}\, v = v - 2\, u\, {}^t u\; v = v - 2\, u\, (u \mid v) = v$$

soit $$\boxed{\mathrm{H}\, v = v}$$

2 Par les propriétés usuelles de la transposition, ${}^t(\,u\,{}^t u) = {}^t(\,{}^t u)\,{}^t u = u\,{}^t u$, et la matrice $u\,{}^t u$ est symétrique. Comme la matrice identité est elle aussi symétrique,

$$\boxed{\text{La matrice H est symétrique.}}$$

De plus, l'associativité du produit matriciel implique

$$(u\,{}^t u)^2 = (u\,{}^t u)(u\,{}^t u) = u(\,{}^t u\, u)\,{}^t u = u\,(u \mid u)\,{}^t u = u\,{}^t u$$

puisque u est unitaire. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{H}\,{}^t\mathrm{H} &= \mathrm{H}^2 && \text{(H est symétrique)} \\ &= (\mathrm{I} - 2\, u\,{}^t u)^2 \\ &= \mathrm{I} - 4\, u\,{}^t u + 4\,(u\,{}^t u)^2 && (\text{I et } u\,{}^t u \text{ commutent}) \\ &= \mathrm{I} - 4\, u\,{}^t u + 4\, u\,{}^t u \end{aligned}$$

soit $$\mathrm{H}\,{}^t\mathrm{H} = \mathrm{I}$$

ce qui signifie que $$\boxed{\text{La matrice H est orthogonale.}}$$

> On peut aussi se servir des résultats de la première question, qui se traduisent par le fait que la matrice H représente, dans la base canonique, la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $u^\perp$; elle est donc de fait automatiquement orthogonale.

3 Remarquons que $(g \mid e_1) = \gamma_1$ et que $\gamma_1 < 1$: en effet, $\gamma_1 \leqslant \|g\| = 1$, et l'hypothèse $\gamma_1 = 1$ impliquerait, par application de l'inégalité de Cauchy–Schwarz et de son cas d'égalité, que $g = e_1$, ce qui est exclu par hypothèse. Ainsi, il est légitime de définir u comme dans l'énoncé, la racine carrée étant non nulle. Comme g et e_1 sont unitaires,

$$\|g - e_1\|^2 = \|g\|^2 - 2\,(g \mid e_1) + \|e_1\|^2 = 2\,(1 - \gamma_1)$$

ce qui montre que $\|u\| = 1$, c'est-à-dire que

$$\boxed{\text{Le vecteur } u \text{ est unitaire.}}$$

Si H est définie comme dans l'équation (1) de l'énoncé, écrivons

$$\begin{aligned}(u \mid g) &= \frac{1}{\sqrt{2\,(1-\gamma_1)}}\,(g - e_1 \mid g)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\,(1-\gamma_1)}}\,((g \mid g) - (e_1 \mid g))\\ &= \frac{1-\gamma_1}{\sqrt{2\,(1-\gamma_1)}}\end{aligned}$$

d'où $$(u \mid g) = \sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}}$$

et $$\mathrm{H}\,g = g - 2\,u\,{}^t u\;g = g - 2\,u\,(u \mid g)$$

donc $$\begin{aligned}\mathrm{H}\,g &= g - 2\,u\sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}}\\ &= g - 2\sqrt{\frac{1-\gamma_1}{2}}\,\frac{g-e_1}{\sqrt{2\,(1-\gamma_1)}}\\ &= g - (g - e_1)\end{aligned}$$

soit $$\boxed{\mathrm{H}\,g = e_1}$$

4 Comme x n'est pas colinéaire à e_1, il est en particulier non nul, et le vecteur $g = x/\|x\|$, qui est bien défini, est unitaire. Par la question précédente, il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder H associée tels que $\mathrm{H}\,g = e_1$, soit encore $\mathrm{H}\,x = \mathrm{H}\,(\|x\|\,g) = \|x\|\,\mathrm{H}\,g = \|x\|\,e_1$:

> Il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder H associée tels que $\mathrm{H}\,x = \|x\|\,e_1$.

5 D'après la réponse à la question 2, la matrice de Householder H_1 vérifie $\mathrm{H}_1^2 = \mathrm{I}_{m-1}$. En effectuant un produit par blocs, la matrice $\widehat{\mathrm{H}}_1$ est de ce fait aussi sa propre inverse. Par conséquent,

> Les matrices $\widehat{\mathrm{S}}$ et $\widehat{\mathrm{Q}}$ sont semblables.

Réécrivons la condition sur les coefficients de la première ligne et la première colonne en calculant explicitement $\widehat{\mathrm{S}}$. Cela donne

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{S}} &= \widehat{\mathrm{H}}_1\widehat{\mathrm{Q}}\widehat{\mathrm{H}}_1\\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & \mathrm{H}_1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} c & {}^t q_{21} \\ \hline q_{21} & \mathrm{Q}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & \mathrm{H}_1\end{array}\right)\\ &= \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & \mathrm{H}_1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} c & {}^t q_{21}\,\mathrm{H}_1 \\ \hline q_{21} & \mathrm{Q}\,\mathrm{H}_1\end{array}\right)\end{aligned}$$

soit $$\widehat{\mathrm{S}} = \left(\begin{array}{c|c} c & {}^t q_{21}\,\mathrm{H}_1 \\ \hline \mathrm{H}_1\,q_{21} & \mathrm{H}_1\,\mathrm{Q}\,\mathrm{H}_1\end{array}\right)$$