E3A Maths B PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (ENS Cachan) ; il a été relu par Christophe Fiszka (ENS Cachan) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de quatre exercices indépendants qui font appel à de nombreuses parties du programme.

- Le premier exercice est consacré à la géométrie. On y étudie la podaire d'une parabole par rapport à deux points, le foyer et l'origine, c'est-à-dire l'ensemble des projetés orthogonaux de chacun de ces points sur les tangentes à la parabole. Les questions sont très classiques et ne posent pas de problème particulier.
- Le deuxième exercice est divisé en deux parties. La première étudie des propriétés élémentaires de la fonction
$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2x^2}$$
C'est l'occasion de réviser les résultats majeurs du cours sur les séries numériques et les séries de fonctions. Dans la deuxième partie, on s'attache à montrer que la fonction étudiée en première partie peut se mettre sous forme de l'intégrale à paramètre
$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\mathrm{e}^{xt}-1}\,\mathrm{d}t$$
Ce sont ici les connaissances sur les intégrales généralisées qui sont évaluées.
- Dans le troisième exercice, on s'intéresse à un espace préhilbertien dans lequel une famille $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ vérifie la propriété
$$(\mathrm{P}) \qquad \forall x \in \mathrm{E} \qquad \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x \mid e_i)^2$$
Sous les hypothèses $\|e_i\| \geqslant 1$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, ou de liberté de $\mathscr{B}$, on établit que $\mathscr{B}$ est orthonormale. L'exercice est très guidé et utilise des résultats de base du cours sur les espaces préhilbertiens.
- Enfin, dans le quatrième exercice on montre que, pour une norme subordonnée $\mathcal{N}$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, tout sous-groupe $\mathcal{G}$ de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ inclus dans la boule fermée pour $\mathcal{N}$ de centre I_n et de rayon 1 est constitué de matrices de spectre $\{1\}$. Une étude plus spécifique consacrée à la dimension 2 permet de montrer que dans ce cas, de tels sous-groupes $\mathcal{G}$ sont réduits à la matrice identité. Ici encore, les questions sont nombreuses et guident efficacement le raisonnement. Cet exercice permet de réviser des points essentiels du programme d'algèbre linéaire sans avoir à faire preuve de grande technicité.

En résumé, cette épreuve constitue un bon sujet de révision pour les points majeurs du programme de deuxième année. Elle est conçue pour être intégralement traitée en quatre heures par tout candidat correctement préparé. Ceux qui chercheraient des approfondissements du cours passeront néanmoins leur chemin.

Indications

Exercice 1

I.3 Les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente au point de paramètre t sont $(x'(t), y'(t))$.

I.4 Tout point M de la podaire est caractérisé par l'appartenance à une tangente à Γ et le fait que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MF}}$ est orthogonal à cette même tangente.

I.5.2 Commencer par étudier les points stationnaires. Dans l'optique de tracer la courbe γ, dresser le classique tableau des variations des abscisse et ordonnée ou remarquer que l'on peut exprimer t en fonction des coordonnées du point courant et en déduire une équation cartésienne de γ.

Exercice 2

II.A.1 Distinguer suivant que x est nul ou non.

II.A.4 Remarquer que $1 + n^2x^2 \geqslant n^2x^2$ pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

II.A.5.1 La fonction $\psi : t \longmapsto 1/(1 + t^2x^2)$ est continue, décroissante et positive sur I.

II.B.1 Pour $x > 0$, montrer que $\mathrm{e}^{\,xt} - 1$ admet une limite finie quand t tend vers 0.

II.B.3.1.b Utiliser la linéarité de l'intégrale en remarquant que $\sin a = \mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{\,ia}$ pour tout réel a.

II.B.3.2 Développer en série l'intégrande et appliquer le théorème de convergence dominée à la suite des sommes partielles de la série de fonctions obtenue.

Exercice 3

III.1.1 Noter que $e_i \in \mathrm{F}$ pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$.

III.1.2 Justifier et utiliser le fait que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^{\perp} = \mathrm{E}$.

III.2 Appliquer la propriété (P) à un vecteur bien choisi.

III.3.4 Montrer l'égalité en raisonnant sur les coefficients de la matrice A^2 et en écrivant les coordonnées des vecteurs sous forme de produit scalaire. Utiliser, entre autres, la symétrie du produit scalaire.

III.3.5 Exprimer les coordonnées du vecteur $a(x)$ si $x \in \mathrm{Ker}\ a$.

III.3.6 Que signifie l'orthonormalité de la famille $\mathscr{B}$ pour la matrice A ? Utiliser la relation $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}$ avec la question 3.5.

Exercice 4

IV.2 Que dire, topologiquement, de l'ensemble $\{\mathrm{X} \in \mathbb{C}^n \mid \|\mathrm{X}\| \leqslant 1\}$?

IV.4 On est en dimension finie !

IV.6.2 Pourquoi A admet-elle des valeurs propres ? Noter que $\mathcal{G} \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

IV.6.3 Que fournit la question 6.1 ? Penser à une inégalité triangulaire.

IV.6.4 Caractériser le comportement asymptotique de la suite $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ si $|\lambda| \neq 1$.

IV.6.6 Raisonner par récurrence sur $q \in \mathbb{N}$.

IV.7.1 Montrer que la matrice A est trigonalisable, avec un spectre réduit à $\{1\}$.

IV.7.2 Calculer T^2 puis T^3 pour conjecturer une formule pour T^m que l'on démontre par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$.

IV.7.3 Les normes $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont équivalentes. Utiliser le fait que la matrice A est semblable à T, ainsi que la sous-additivité de la norme $\mathcal{N}$.

IV.7.5 Se servir de la question 6.7.

Exercice 1

I.1 Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$x(t) = t^2 = \left(\frac{y(t)}{2}\right)^2 = \frac{y^2(t)}{4}$$

Or $y : t \mapsto 2t$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Ainsi,

$$\boxed{\text{Une équation cartésienne de } \Gamma \text{ est } x = y^2/4.}$$

I.2 L'équation cartésienne de Γ est sous la forme $y^2 = 2px$. Il en résulte, d'après le cours sur les coniques, que

> La courbe Γ est la parabole d'axe $(\mathrm{O}x)$, de paramètre $p = 1/2 \times 4 = 2$, de sommet $\mathrm{S} = \mathrm{O}$ (l'origine du repère orthonormé du plan), de foyer $\mathrm{F}(1,0)$ et de directrice la droite d'équation $x = -1/4 \times 4 = -1$.

I.3 Les fonctions x et y sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc la courbe Γ admet en tout point de paramètre t une tangente dirigée par le vecteur de coordonnées

$$(x'(t), y'(t)) = (2t, 2) \qquad \text{ou encore par} \qquad \overrightarrow{d_t}(t, 1)$$

La tangente $\mathcal{T}_t$ à la courbe Γ en $\mathrm{M}(t)$ est l'ensemble des points $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ tels que

$$\det(\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}}, \overrightarrow{d_t}) = 0$$

Une équation de $\mathcal{T}_t$ est donc

$$\begin{vmatrix} \mathrm{X} - x(t) & t \\ \mathrm{Y} - y(t) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

soit encore

$$\mathrm{X} - t^2 - t(\mathrm{Y} - 2t) = 0$$

> En tout point de paramètre t, la courbe Γ admet une tangente d'équation
> $$\mathrm{X} - t\mathrm{Y} + t^2 = 0$$

> Il est également possible de déterminer une équation de la tangente à partir de l'équation cartésienne obtenue à la question I.1 et de la règle dite « du dédoublement » : pour une conique d'équation
> $$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$
> l'équation de la tangente au point de coordonnées (x_0, y_0) est
> $$axx_0 + b(xy_0 + x_0y) + cyy_0 + d\frac{1}{2}(x + x_0) + e\frac{1}{2}(y + y_0) + f = 0$$
> Dans notre cas, cela donne
> $$\frac{1}{2}\big(\mathrm{X} + x(t)\big) = \mathrm{Y}y(t)/4 \qquad \text{soit} \qquad \mathrm{X} + t^2 - t\mathrm{Y} = 0$$

I.4 Soit F le point de coordonnées $(1, 0)$. La podaire de Γ par rapport à F est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) pour lesquels il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{M}(x, y)$ appartienne à la tangente $\mathcal{T}_t$ au point de paramètre t et tel que le vecteur directeur de $\mathcal{T}_t$ et $\overrightarrow{\mathrm{MF}}$ soient orthogonaux. Cela s'écrit

$$\left\{\begin{aligned} x - ty + t^2 &= 0 \\ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x - ty &= -t^2 \\ tx + y &= t \end{aligned}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ t \end{pmatrix}$$

Comme $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} = 1 + t^2 \neq 0$$

le système précédent est inversible et les formules de Cramer donnent

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{1+t^2} \begin{vmatrix} -t^2 & -t \\ t & 1 \end{vmatrix} = \frac{-t^2 + t^2}{1+t^2} = 0 \\ y &= \frac{1}{1+t^2} \begin{vmatrix} 1 & -t^2 \\ t & t \end{vmatrix} = \frac{t + t^3}{1+t^2} = \frac{t(1+t^2)}{1+t^2} = t \end{aligned}\right.$$

La podaire de Γ par rapport à F est donc l'ensemble $\{(0, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\text{La podaire de } \Gamma \text{ par rapport à F est la droite } \mathscr{D} : x = 0.}$$

I.5.1 De façon similaire à la question I.4, la podaire de Γ par rapport au point O est l'ensemble indicé par $t \in \mathbb{R}$ des points de coordonnées (x, y) vérifiant

$$\left\{\begin{aligned} x - ty + t^2 &= 0 \\ \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}\right. \iff \left\{\begin{aligned} x - ty &= -t^2 \\ tx + y &= 0 \end{aligned}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \det \begin{pmatrix} 1 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix} = 1 + t^2 \neq 0$$

le système précédent est inversible et les formules de Cramer fournissent

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} -t^2 & -t \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{1+t^2} = \frac{-t^2}{1+t^2} \\ y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & -t^2 \\ t & 0 \end{vmatrix}}{1+t^2} = \frac{t^3}{1+t^2} \end{aligned}\right.$$

Ainsi, $$\boxed{\gamma = \left\{ \left(\frac{-t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2} \right) \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}}$$