E3A Maths A PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (ENS Cachan) ; il a été relu par Alexei Tsygvintsev (ENS Lyon) et Nicolas Martin (ENS Lyon).

L'énoncé se compose d'une partie préliminaire et d'un problème en quatre parties.

Les questions préliminaires portent sur des résultats élémentaires à propos des racines n-ièmes de l'unité, du calcul matriciel et de la réduction. Elles permettaient de tester la connaissance du cours par les candidats.

Prétextant le calcul d'une intégrale d'une fonction rationnelle en cosinus et sinus, le problème permet de passer en revue les théorèmes importants d'analyse réelle et d'algèbre linéaire. Les parties B et C sont indépendantes de la partie A alors que la dernière utilise toutes les autres.

- La première partie donne une réponse, purement analytique, au calcul de l'intégrale à paramètre définie pour tout $x \in \,]-1\,;1\,[$ par
$$h(x) = \int_0^\pi \ln\left(1 - 2x\cos(t) + x^2\right) \mathrm{d}t$$
Par exemple, on applique ici les théorèmes classiques de continuité et de dérivation des intégrales à paramètre.
- La deuxième partie aborde les propriétés de réduction des matrices dites circulantes grâce aux propriétés arithmétiques des racines n-ièmes de l'unité. On prouve que ces matrices sont diagonalisables et on calcule leurs spectres.
- Puis le sujet effectue, sans vraiment le dire, une transformée de Fourier discrète d'une fonction et étudie par l'exemple les propriétés de cette transformation. On fait le lien entre la transformée et les matrices circulantes de la partie précédente.
- La dernière partie regroupe les résultats des parties B et C pour calculer d'une autre manière l'intégrale de la partie A.

Le problème est relativement facile, classique, et nécessite pas mal de calculs. Il convient donc d'être particulièrement soigneux et précis lors de la rédaction. C'est une bonne occasion de s'assurer de son aptitude aux calculs dans un contexte théorique simplifié ; savoir mener à bien un calcul long est important dans l'appréciation d'une copie, indépendamment de la sélectivité concours.

Indications

Questions préliminaires

1.c Reconnaître une somme géométrique et bien distinguer le cas où la raison vaut 1.

2.c Prouver que si $\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1}$ alors $p(\mathrm{M}) = \mathrm{P}p(\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}$.

Partie A

A.1 Au lieu d'essayer de calculer directement l'intégrale, faire un changement de variable adéquat sur le second facteur.

A.2 Il suffit d'écrire la formule d'Euler $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t} = \cos(t) + i\sin(t)$.

A.4 Effectuer le changement de variable $u = \pi - t$.

A.7 Faire bien attention aux valeurs possibles de x. Respectivement, on considère les trois cas $x \in [\,0\,;1\,[$, $x \in [\,-1\,;1\,] \smallsetminus \{0\}$ et $x \in \,]\,-1\,;1\,[$ aux questions 5, 6 et 7. Toutefois h est continue et paire...

Partie B

B.1 Effectuer pour j variant de n à 2, l'opération suivante sur les colonnes :

$$\mathrm{C}_j \leftarrow \mathrm{C}_j - a\mathrm{C}_{j-1}$$

B.2.b Faire un développement suivant la première colonne.

B.4 Reprendre la preuve de la question préliminaire 2.c.

Partie C

C.1.b Appliquer la question préliminaire 1.c.

C.2.c Montrer pour tout $k \in [\![\,0\,;\,n-1\,]\!]$

$$\frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\varphi\left(\frac{2s\pi}{n}\right)\omega^{-ks} = a^k$$

Partie D

D.1 C'est une somme de Riemann.

D.2.b On relie facilement la fonction F à la fonction φ de la question C.2 par

$$\mathrm{F}(t) = \ln(|\varphi(t)|) - \ln(1 - a^n)$$

Utiliser ensuite cette relation pour calculer les sommes de Riemann.

Questions préliminaires

Dans la suite, utilisons la notation $\mathrm{D} = \mathrm{Diag}\,(a_1,\ldots,a_n)$ pour désigner la matrice diagonale de taille n dont les éléments diagonaux sont $\mathrm{D}_{ii} = a_i$ pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$.

1.a L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est

$$\mathbb{U}_n = \{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2k\pi/n} \mid k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]\}$$

Comme $\omega^k = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,2k\pi/n}$, on trouve

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \{\omega^k \ \mid\ k \in [\![\, 0\,;\, n-1\,]\!]\}}$$

1.b La factorisation est donnée par

$$\boxed{\mathrm{X}^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\mathrm{X} - \omega^k)}$$

1.c Tout d'abord, remarquons que la somme recherchée est une somme géométrique

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^r)^k$$

Il faut donc regarder si la raison ω^r est égale ou non à 1. Or

$$\begin{aligned}
\omega^r = 1 \qquad &\iff \quad \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,r2\pi/n} = 1 \qquad \iff \quad 2r\pi/n = 0 \mod (2\pi)\\
&\iff \quad r/n \in \mathbb{Z} \qquad \iff \qquad r \in n\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Par conséquent si $r \in n\mathbb{Z}$ alors

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$$

Sinon, $r \notin n\mathbb{Z}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \sum_{k=0}^{n-1} (\omega^r)^k = \frac{1-\omega^{rn}}{1-\omega^r} = \frac{1-(\omega^n)^r}{1-\ \omega^r} = \frac{1-1^r}{1-\omega^r} = 0$$

En résumé,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \notin n\mathbb{Z} \\ n & \text{si } r \in n\mathbb{Z} \end{cases}}$$

2.a Par définition, M est diagonalisable s'il existe une matrice complexe inversible P et une matrice D diagonale telles que

$$\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \mathrm{Diag}\,(\lambda_0,\ldots,\lambda_{n-1})$$

Par suite, en utilisant la propriété multiplicative du déterminant, on a

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{M}) &= \det\left(\mathrm{PDP}^{-1}\right)\\
&= \det(\mathrm{P})\det(\mathrm{D})\det\left(\mathrm{P}^{-1}\right)\\
&= \det(\mathrm{P})\det\left(\mathrm{P}^{-1}\right)\det(\mathrm{D})\\
\det(\mathrm{M}) &= \det(\mathrm{D}) \qquad\qquad \text{car } \det\left(\mathrm{P}^{-1}\right) = \det(\mathrm{P})^{-1}
\end{aligned}$$

Or on sait que le déterminant d'une matrice diagonale vaut le produit de ses coefficients diagonaux. Dans notre cas, on obtient $\det(\mathrm{D}) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k$. Finalement,

$$\boxed{\det(\mathrm{M}) = \prod_{k=0}^{n-1} \lambda_k}$$

2.b Avec les notations de l'énoncé, on dispose de la relation

$$\mathrm{MV} = \lambda \mathrm{V}$$

Prouvons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(\ell): \quad \mathrm{M}^\ell \mathrm{V} = \lambda^\ell \mathrm{V}$$

est vraie pour tout $\ell \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie, puisque par définition, on a $\mathrm{M}^0 = \mathrm{I}_n$, $\lambda^0 = 1$ et $\mathrm{I}_n\mathrm{V} = \mathrm{V}$.
- $\underline{\mathscr{P}(\ell) \Longrightarrow \mathscr{P}(\ell+1)}$: calculons

$$\mathrm{M}^{\ell+1}\mathrm{V} = \mathrm{M}\left(\mathrm{M}^\ell \mathrm{V}\right) = \mathrm{M}\left(\lambda^\ell \mathrm{V}\right) = \lambda^\ell \mathrm{MV} = \lambda^{\ell+1}\mathrm{V}$$

- Conclusion : $\qquad \forall \ell \in \mathbb{N} \qquad \mathrm{M}^\ell \mathrm{V} = \lambda^\ell \mathrm{V}$

Ainsi, $\boxed{\text{V est un vecteur propre de } \mathrm{M}^\ell \text{ associé à la valeur propre } \lambda^\ell.}$

> Autrement dit, si l'on considère un monôme $p(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^\ell$, on vient de démontrer que $p(\mathrm{M})\mathrm{V} = p(\lambda)\mathrm{V}$. Par linéarité, on en déduit que
>
> $$\forall p \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \qquad p(\mathrm{M})\mathrm{V} = p(\lambda)\mathrm{V}$$
>
> Cette relation implique, par exemple, que toute valeur propre est racine de n'importe quel polynôme annulateur de M.

2.c Reprenons les notations de la question 2.a. Il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que

$$\mathrm{M} = \mathrm{PDP}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{D} = \mathrm{Diag}\left(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1}\right)$$

Dans un premier temps, on a

$$\mathrm{M}^k = \underbrace{(\mathrm{PDP}^{-1})\cdots(\mathrm{PDP}^{-1})}_{k \text{ fois}} = \mathrm{PD}\underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{=\mathrm{I}_p}\mathrm{D}\cdots\underbrace{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P}}_{=\mathrm{I}_p}\mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1}$$

Dans un second temps, si $p(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, on obtient

$$p(\mathrm{M}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{M}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{PD}^k\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{D}^k\right)\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}p(\mathrm{D})\mathrm{P}^{-1}$$

avec $p(\mathrm{D})$ une matrice diagonale

$$p(\mathrm{D}) = \mathrm{Diag}\left(p(\lambda_1), \ldots, p(\lambda_n)\right)$$

Ainsi, $\boxed{\text{Pour tout polynôme } p \in \mathbb{C}[\mathrm{X}],\ p(\mathrm{M}) \text{ est diagonalisable.}}$