Centrale Maths 2 PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Samuel Baumard (ENS Ulm) ; il a été relu par Pierre-Yves Bienvenu (ENS Ulm) et Nicolas Martin (ENS Lyon).

Ce sujet, très progressif, vise à donner une construction de l'exponentielle matricielle ne passant pas par les séries comme on le fait usuellement, mais par une analogie avec l'identité

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \qquad (\mathbf{1})$$

valable pour $x \in \mathbb{R}$. Le but est aussi de préciser au passage le comportement de l'exponentielle vis-à-vis du déterminant et des sommes commutatives.

- On commence par rappeler via des développements asymptotiques simples que l'identité (1) est encore vraie si l'on suppose plus généralement que x est un nombre complexe.
- On passe ensuite au cas des matrices antisymétriques réelles en dimension 2 et 3, en montrant que les exponentielles de ces matrices sont des rotations dont on peut déterminer l'angle ; parmi les outils mis en œuvre, on compte la stabilité par un endomorphisme de l'orthogonal du noyau de cet endomorphisme, et l'invariance par similitude orthogonale d'une certaine norme matricielle.
- La suite du problème se place en dimension quelconque, avec d'abord le cas des matrices diagonalisables, passant notamment par un résultat de diagonalisation simultanée...
- ... puis le cas des matrices nilpotentes, en raisonnant entre autres sur la suite des noyaux itérés.
- Enfin, la dernière partie prouve que l'exponentielle d'une matrice quelconque existe toujours, en combinant les résultats des deux parties précédentes dans le formalisme des polynômes d'endomorphismes.

Ce sujet, qui n'utilise finalement qu'assez peu de résultats du cours, permet de revoir une bonne partie des techniques classiques en algèbre linéaire et en réduction des endomorphismes, avec un crochet par les espaces euclidiens.

Indications

Partie I

I.B Faire un développement asymptotique du module et de l'argument.

Partie II

II.B.1.c Adapter le raisonnement de la question II.B.1.a à la restriction de u_{B} au sous-espace $(\mathrm{Ker}\ u_{\mathrm{B}})^{\perp}$.

II.B.3 Justifier que $\|\mathrm{B}\|_2 = \|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}\|_2$.

Partie III

III.A.2 On cherche un polynôme prenant des valeurs données en des points prescrits.

III.C.1 Montrer que les restrictions en question sont des endomorphismes diagonalisables, et recoller les morceaux.

Partie IV

IV.A.1 Montrer que l'implication $\mathrm{Ker}\ \mathrm{A}^j \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}^{j-1} \Longrightarrow \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}^{j+1} \subset \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}^j$ est toujours vraie.

IV.A.2 Passer aux dimensions dans les résultats de la question précédente.

IV.B Utiliser la formule du binôme de Newton.

Partie V

V.A.2 Penser au théorème de Cayley-Hamilton.

V.A.3 Développer les éléments par la formule du binôme, et montrer que les puissances de J_p qui interviennent forment une famille libre.

V.B.2.a Justifier que P est un multiple de $(\mathrm{X} - \lambda_j)^{n_j}$ pour tout j.

I. Question préliminaire

I.A Commençons par calculer le module :

$$\begin{aligned}\left|1+\frac{z}{n}\right|^2 &= \left|1+\frac{a}{n}+i\frac{b}{n}\right|^2\\ &= \left(1+\frac{a}{n}\right)^2+\left(\frac{b}{n}\right)^2\\ &= \frac{(a+n)^2+b^2}{n^2}\end{aligned}$$

d'où
$$\left|1+\frac{z}{n}\right| = \left(\frac{(a+n)^2+b^2}{n^2}\right)^{1/2}$$

et
$$\boxed{\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = \left(\frac{(a+n)^2+b^2}{n^2}\right)^{n/2}}$$

Pour ce qui est de l'argument, on commence par exclure le cas $1+z/n=0$, autrement dit $(a,b)=(-n,0)$, et on se sert du fait que, pour tout $(u,v)\in\mathbb{R}^2$, les arguments de $u+i\,v$ sont donnés par

$$\arg(u+i\,v)\equiv\begin{cases}\operatorname{Arctan}(v/u)\ [2\pi] & \text{si } u>0\\ \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(v)\ [2\pi] & \text{si } u=0\\ \pi+\operatorname{Arctan}(v/u)\ [2\pi] & \text{si } u<0\end{cases}$$

Il faut donc distinguer les cas selon la position de a par rapport à $-n$:

- si $a+n<0$, alors $\operatorname{Re}(1+z/n)<0$ et $\arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right)\equiv\pi+\operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a+n}\ [2\pi]$;
- si $a+n=0$, alors $1+z/n=i\,b/n$ et $\arg(1+z/n)\equiv\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(b)\ [2\pi]$;
- si $a+n>0$, alors $\arg\left(1+\dfrac{z}{n}\right)\equiv\operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a+n}\ [2\pi]$.

Comme la somme des arguments de deux nombres complexes est un argument de leur produit, cela donne

$$\boxed{\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\equiv\begin{cases}n\pi+n\operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a+n}\ [2\pi] & \text{si } a+n<0\\ n\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(b)\ [2\pi] & \text{si } a+n=0\\ n\operatorname{Arctan}\dfrac{b}{a+n}\ [2\pi] & \text{si } a+n>0\end{cases}}$$

> Pour limiter le nombre de cas, on aurait aussi pu utiliser la formule dite de l'angle au centre :
>
> $$\forall z\in\mathbb{C}\smallsetminus\mathbb{R}^-,\quad \arg z\equiv 2\operatorname{Arctan}\frac{\operatorname{Im} z}{|z|+\operatorname{Re} z}\ [2\pi]$$

I.B L'objectif est de déterminer le comportement asymptotique du module et d'un argument de $(1+z/n)^n$ lorsque n tend vers l'infini. Les développements limités utiles ici sont $(1+u)^\alpha = 1+\alpha\, u + \mathrm{o}\,(u)$, $\ln(1+u) = u + \mathrm{o}\,(u)$ et $\mathrm{Arctan}\,(u) = u + \mathrm{o}\,(u)$ au voisinage de $u = 0$. Il n'est pas nécessaire de se préoccuper du cas $a+n \leqslant 0$, tous les développements asymptotiques étant faits au voisinage de l'infini.

Pour le module,

$$\begin{aligned}\frac{(a+n)^2+b^2}{n^2} &= \left(1+\frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2\\ &= 1 + \frac{2a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

d'où
$$\ln \frac{(a+n)^2+b^2}{n^2} = \frac{2a}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

puis
$$\frac{n}{2}\ln \frac{(a+n)^2+b^2}{n^2} = a + \mathrm{o}\,(1)$$

et enfin
$$\left|1+\frac{z}{n}\right|^n = e^a\,(1+\mathrm{o}\,(1))$$

Pour l'argument,

$$\begin{aligned}\frac{b}{a+n} &= \frac{b}{n}\,\frac{1}{1+a/n}\\ &= \frac{b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

d'où
$$\mathrm{Arctan}\,\frac{b}{a+n} = \frac{b}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et
$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n \equiv b + \mathrm{o}\,(1) \quad [2\pi]$$

Par conséquent,

$$\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left|1+\frac{z}{n}\right|^n \exp\left(i\,\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right) = e^a\,(1+\mathrm{o}\,(1))\,e^{i\,(b+\mathrm{o}(1))} = e^{a+i\,b} + \mathrm{o}\,(1)$$

ce qui signifie précisément que

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z}$$