Centrale Maths 1 PSI 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Clément Mifsud (ENS Cachan) ; il a été relu par Émilie Liboz (Professeur agrégé à l'université) et Laëtitia Borel-Mathurin (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est consacrée à l'étude des coefficients de Fourier exponentiels, notés $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$, de la fonction

$$\mathrm{G}_x : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x\sin t} \end{cases}$$

où x est un réel. Les fonctions $(x \longmapsto \varphi_n(x))_{n\in\mathbb{Z}}$ sont appelées fonctions de Bessel de première espèce.

- La première partie établit des propriétés simples des fonctions φ_n qui autorisent ensuite à restreindre leur étude à $\mathbb{R}_+$ et au cas $n \geqslant 0$. Cette partie utilise l'ensemble des théorèmes associés aux séries de Fourier.
- La deuxième partie permet d'obtenir le développement en série entière des fonctions φ_n. On s'en sert ensuite pour écrire un programme qui permet de calculer la valeur de $\varphi_n(x)$ à une précision arbitraire.
- Les deux dernières parties utilisent la théorie des équations différentielles, plus particulièrement des résultats dits de Sturm-Liouville, pour étudier la répartition des zéros des fonctions φ_n.

Ce sujet constitue un bon moyen de faire le point sur ses connaissances en analyse, car il utilise une grande partie du programme : séries de Fourier, séries entières, séries de fonctions, intégration sur un intervalle quelconque et équations différentielles.

Indications

Partie I

I.C Si la fonction f est continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, son intégrale sur un intervalle de longueur 2π est indépendante du choix de l'intervalle.

I.D Penser à l'identité de Parseval.

Partie II

II.A On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question I.D.

II.B Utiliser le développement en série entière de la fonction exponentielle ainsi que le théorème d'intégration terme à terme.

II.C.2 Ne pas oublier que, pour $(k, l) \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,kt} \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}\,lt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

II.C.3 Se servir des questions II.B et II.C.2.

II.D Que vaut la dérivée d'une fonction développable en série entière ?

II.E.2 Se souvenir du critère spécial des séries alternées.

Partie III

III.A.2 Dériver deux fois l'expression de z et diviser, pour $x > 0$, l'équation III.1 par $x\sqrt{x}$.

III.A.3 Supposer par l'absurde qu'il existe $x > 0$ tel que $(z(x), z'(x)) = (0, 0)$ et arriver à une contradiction grâce au théorème de Cauchy-Lipschitz.

III.A.4 Utiliser la question III.A.3 pour la fonction z associée à la fonction $y = \varphi_n$.

III.B.2.a Majorer l'expression obtenue à la question III.B.1 en fonction de A, B, λ et h.

III.B.3 Penser au résultat de la question III.B.2.b.

III.B.4 La question III.B.3 pour la fonction z associée à la fonction $y = \varphi_n$ permet de conclure.

Partie IV

IV.C.1 Ne pas oublier que la fonction q tend vers 1 en $+\infty$.

IV.C.2 La fonction z est solution de l'équation III.2.

IV.D.2 L'inégalité provient de la stricte croissance de la suite $\left(\alpha_k^{(n)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ et de la question IV.C.3.

I. Questions préliminaires

I.A.1 Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Notons

$$\mathrm{S}_p\left(\mathrm{G}_x\right) : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \sum\limits_{n=-p}^{p} \varphi_n(x) \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, nt} \end{cases}$$

la somme partielle de rang p de la série Fourier de la fonction G_x. La fonction G_x étant continue sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La suite des sommes partielles } (\mathrm{S}_p(\mathrm{G}_x))_{p\in\mathbb{N}} \\ \text{converge en moyenne quadratique vers } \mathrm{G}_x.\end{array}}$$

De plus la fonction G_x est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, le théorème de convergence normale s'applique et par conséquent

$$\boxed{\text{La suite des sommes partielles } (\mathrm{S}_p(\mathrm{G}_x))_{p\in\mathbb{N}} \text{ converge normalement sur } \mathbb{R} \text{ vers } \mathrm{G}_x.}$$

Comme la convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence simple, on obtient

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_x(t) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, x \sin t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(x) \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, nt}}$$

I.A.2 Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction G_x est $\mathscr{C}^k$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \qquad c_n\left(\mathrm{G}_x^{(k)}\right) = (\mathrm{i}n)^k c_n(\mathrm{G}_x) = (\mathrm{i}n)^k \varphi_n(x)$$

Or la fonction $\mathrm{G}_x^{(k)}$ est aussi continue et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. En reprenant les notations de la question I.A.1, on sait que les sommes partielles $\left(\mathrm{S}_p\left(\mathrm{G}_x^{(k)}\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}$ convergent normalement vers $\mathrm{G}_x^{(k)}$ et en particulier

$$\left|c_n\left(\mathrm{G}_x^{(k)}\right)\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Finalement
$$\boxed{\left|\varphi_n\left(\mathrm{G}_x\right)\right| = \left|\frac{c_n\left(\mathrm{G}_x^{(k)}\right)}{n^k}\right| \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)}$$

I.B Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après la relation de Chasles,

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nt}\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{0} \mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nt}\,\mathrm{d}t\right)$$

soit en effectuant le changement de variable $u = -t$ dans la seconde intégrale

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \mathrm{G}_x(-u)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, nu}\,\mathrm{d}t\right)$$

Par imparité de la fonction sinus,

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_x(-t) = \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, x\sin(-t)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x\sin t} = \overline{\mathrm{G}_x(t)}$$

ainsi
$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi} \mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, nt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi} \overline{\mathrm{G}_x(u)}\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\, nu}\,\mathrm{d}t\right)$$

Remarquons ensuite que $\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nu}$, d'où

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \overline{\mathrm{G}_x(u)}\,\overline{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}}\,\mathrm{d}u\right)$$

Puis comme pour tout $(z,z') \in \mathbb{C}^2$, $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi \mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t + \int_0^\pi \overline{\mathrm{G}_x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}}\,\mathrm{d}u\right)$$

et de plus pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z \in \mathbb{R}$ et par suite,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z} \qquad \varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi 2\,\mathrm{Re}\,\left(\mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nt}\right)\mathrm{d}t \in \mathbb{R}}$$

I.C Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après la relation $\sin(t+\pi) = -\sin(t)$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_x(t+\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin(t+\pi)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\sin t} = \mathrm{G}_{-x}(t)}$$

et aussi d'après le résultat de la question I.B

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{G}_x(t+\pi) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\sin(t+\pi)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\sin t} = \mathrm{G}_x(-t)}$$

Soit $n \in \mathbb{Z}$. D'après le fait que $\mathrm{G}_x(t+\pi) = \mathrm{G}_{-x}(t)$, on obtient

$$\varphi_n(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{G}_{-x}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{G}_x(t+\pi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t$$

puis en utilisant le changement de variable $u = t + \pi$,

$$\varphi_n(-x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{G}_x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n(u-\pi)}\,\mathrm{d}u$$

Or pour tout $u \in [\,0\,;2\pi\,]$, $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n(u-\pi)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\pi} = (-1)^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}$ et par conséquent,

$$\varphi_n(-x) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{G}_x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}\,\mathrm{d}u$$

Remarquons ensuite que l'intégrale d'une fonction f continue 2π-périodique sur un intervalle de longueur 2π est indépendante du choix de l'intervalle. En appliquant ceci à la fonction 2π-périodique $u \longmapsto \mathrm{G}_x(u)e^{-inu}$, il vient

$$\boxed{\varphi_n(-x) = \frac{(-1)^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{G}_x(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}\,\mathrm{d}u = (-1)^n\varphi_n(x)}$$

Cette égalité implique en particulier que la fonction φ_n de la variable x est paire si l'entier n pair et impaire sinon. Autrement dit

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi_n \text{ a la parité de } n \in \mathbb{Z}.}$$

Considérons maintenant

$$\varphi_{-n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{G}_x(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,nt}\,\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $u = -t$ donne par conséquent

$$\boxed{\varphi_{-n}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{G}_x(-u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{G}_{-x}(u)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,nu}\,\mathrm{d}u = \varphi_n(-x)}$$

d'après le fait que $\mathrm{G}_{-x}(t) = \mathrm{G}_x(-t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.