Mines Maths 2 MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Silvère Gangloff (ENS Ulm) et Nicolas Martin (ENS Lyon).

Ce problème, composé d'algèbre et de topologie, a pour finalité de démontrer que l'enveloppe convexe de l'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales est la boule unité fermée $\mathscr{B}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, au sens de la norme subordonnée à la norme euclidienne canonique, et que les matrices orthogonales constituent les points extrémaux de $\mathscr{B}$. Il se compose de six parties. Les quatre premières sont indépendantes entre elles mais les résultats que l'on y établit servent dans les deux dernières.

- Dans la première partie, on s'intéresse à des résultats généraux sur les matrices.
- La deuxième partie permet d'établir l'existence de la décomposition polaire d'une matrice : on y démontre que toute matrice A d'ordre n s'écrit sous la forme $\mathrm{A} = \mathrm{US}$, où $\mathrm{U} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et S est une matrice symétrique réelle positive.
- Dans la troisième partie, on démontre l'existence et l'unicité du projeté d'un vecteur x de E sur une partie H convexe et compacte d'un espace euclidien E : pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un unique h_0 dans H tel que

  $$\|x - h_0\| = \operatorname*{Inf}_{h \in \mathrm{H}} \|x - h\|$$

  De plus, on établit une caractérisation de ce projeté à l'aide du produit scalaire.
- La quatrième partie traite de l'enveloppe convexe conv(H) d'une partie H de E ; on y prouve que conv(H) est constituée des combinaisons convexes d'au plus $\dim \mathrm{E} + 1$ éléments et que l'enveloppe convexe d'un compact de E est elle-même une partie compacte de E.
- Dans la cinquième partie, on démontre que l'enveloppe convexe $\mathrm{conv}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ de l'ensemble des matrices orthogonales est un compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, puis qu'elle est égale à la boule unité $\mathscr{B}$.
- Enfin, après avoir défini les points extrémaux de $\mathscr{B}$ comme les éléments A de $\mathscr{B}$ tels que l'écriture $\mathrm{A} = (\mathrm{B} + \mathrm{C})/2$, avec B et C appartenant à $\mathscr{B}$, entraîne $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C}$, on établit que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des points extrémaux de $\mathscr{B}$.

Ce sujet est intéressant et bien construit. Les résultats qui y sont démontrés sont relativement classiques et peuvent avoir été rencontrés en exercice ou en problème durant l'année scolaire, mais que les candidats qui ne les ont pas vus se rassurent : les parties sont bien guidées et comportent suffisamment de questions intermédiaires pour pouvoir être traitées. Dans l'ensemble, le sujet est abordable, il n'est pas très long et il ne comporte pas de question exagérément difficile. C'est un bon problème de révision, à aborder après avoir fini les chapitres de topologie et d'algèbre euclidienne de deuxième année.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Partie A

3 On rappelle qu'une matrice symétrique $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est positive si, et seulement si, $\langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle \geqslant 0$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie B

4 Travailler dans une base orthonormée de diagonalisation de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$. Prouver par double inégalité que $\|\mathrm{A}\|_2 = \mathrm{Max}\,\left\{\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{sp}\left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}\right)\right\}$.

5 Diagonaliser ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ dans une base orthonormée puis construire une racine carrée de la matrice diagonale obtenue.

6 Travailler à nouveau dans une base orthonormée de diagonalisation de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$.

7 Pour construire un isomorphisme qui conserve la norme, il suffit de définir une application linéaire qui envoie une base orthonormée sur une base orthonormée.

8 Définir u par son action sur les sous-espaces supplémentaires $\mathrm{Im}\,h$ et $\mathrm{Ker}\,h$.

Partie C

10 Séparer l'existence de l'unicité. Pour l'unicité, remarquer que l'application q définie dans l'énoncé est polynomiale de degré 2.

11 Raisonner par double implication en utilisant l'indication de l'énoncé pour l'une des implications et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour l'autre.

Partie D

12 Utiliser la définition de l'enveloppe convexe, c'est-à-dire démontrer que l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de H est la plus petite partie convexe de E qui contient H.

14 Pour assurer la positivité des coefficients de la combinaison linéaire, introduire le plus petit élément de l'ensemble des $\lambda_i/|\mu_i|$ pour $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$ tel que $\mu_i \neq 0$.

15 Suivre l'indication de l'énoncé.

Partie E

16 Appliquer le résultat de la question 15.

18 Se servir de la condition caractérisant le projeté orthogonal établie dans la question 11.

19 Utiliser la formule de la question 1 avec une base orthonormée de diagonalisation de S.

Partie F

21 Se souvenir du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire.

22 Appliquer le résultat de la question 9.

23 Que pourrait-on dire de A si tous les d_i étaient égaux à 1 ?

24 Commencer par construire deux matrices diagonales D_α et $\mathrm{D}_{-\alpha}$ telles que D soit égale à $(\mathrm{D}_\alpha + \mathrm{D}_{-\alpha})/2$, en modifiant le j^{e} coefficient de la diagonale de D à l'aide du résultat de la question 23. Pour vérifier que A_α et $\mathrm{A}_{-\alpha}$ sont bien dans $\mathscr{B}$, penser à la question 4.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

A. Produit scalaire de matrices

1 Soient A une matrice d'ordre n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$. Notons u l'endomorphisme canoniquement associé à A et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ la matrice de u dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Puisque cette base est orthonormée, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2$,

$$b_{i,j} = \langle u(e_j), e_i \rangle = \langle \mathrm{A} e_j, e_i \rangle$$

> L'énoncé autorise l'identification des vecteurs avec des matrices colonnes, ce qui justifie ici l'identification du vecteur $u(e_j)$, élément de $\mathbb{R}^n$, avec la matrice colonne $\mathrm{A}e_j$, élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le vecteur e_j étant alors lui-même considéré comme une matrice colonne.

Il s'ensuit, comme les matrices A et B sont semblables puis par définition de la trace d'une matrice,

$$\mathrm{Tr}\ \mathrm{A} = \mathrm{Tr}\ \mathrm{B} = \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{A} e_i, e_i \rangle$$

En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Tr}\ \mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{A} e_i, e_i \rangle}$$

2 Notons

$$\varphi \colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \longmapsto \mathrm{Tr}\ \left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{B}\right) \end{cases}$$

et démontrons que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- φ est bien à valeurs dans $\mathbb{R}$.
- φ est symétrique. En effet, pour tout $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$,

  $$\varphi(\mathrm{B}, \mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\ \left({}^t\mathrm{B}\,\mathrm{A}\right) = \mathrm{Tr}\ \left({}^t\left({}^t\mathrm{B}\,\mathrm{A}\right)\right)$$

  car une matrice et sa transposée ont la même trace. Ainsi,

  $$\varphi(\mathrm{B}, \mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\ \left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{B}\right) = \varphi(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

- Démontrons que φ est linéaire à gauche. Soient A, B et C dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par linéarité de la transposition, puis distributivité et linéarité de la trace, on a :

  $$\begin{aligned} \varphi(\lambda\,\mathrm{A} + \mathrm{B}, \mathrm{C}) &= \mathrm{Tr}\ \left({}^t(\lambda \mathrm{A} + \mathrm{B})\,\mathrm{C}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\ \left((\lambda\,{}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B})\,\mathrm{C}\right) \\ &= \mathrm{Tr}\ \left(\lambda\,{}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C} + {}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C}\right) \\ &= \lambda\ \mathrm{Tr}\ \left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{C}\right) + \mathrm{Tr}\ \left({}^t\mathrm{B}\,\mathrm{C}\right) \\ \varphi(\lambda\,\mathrm{A} + \mathrm{B}, \mathrm{C}) &= \lambda \varphi(\mathrm{A}, \mathrm{C}) + \varphi(\mathrm{B}, \mathrm{C}) \end{aligned}$$

  Ainsi, φ est une forme symétrique et linéaire à gauche, c'est donc une forme bilinéaire symétrique.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

- Pour démontrer que φ est définie positive, utilisons la question 1 avec la base canonique de $\mathbb{R}^n$, notée $(e_1, \ldots, e_n)$, qui est bien une base orthonormée pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$. Soit A une matrice d'ordre n,

$$\varphi(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathrm{A}e_i, \mathrm{A}e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \|\mathrm{A}e_i\|^2 \geqslant 0$$

> Rappelons en effet que, pour toute matrice B d'ordre n et tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on a
> $$\langle {}^t\mathrm{B}\,x, y\rangle = \langle x, \mathrm{B}y\rangle$$

La forme bilinéaire φ est donc positive. En outre, si $\varphi(\mathrm{A}, \mathrm{A}) = 0$, alors

$$\forall i \in [\![\, 1 \,;\, n \,]\!] \qquad \|\mathrm{A}e_i\| = 0$$

car une somme de termes positifs est nulle si et seulement si chaque terme est nul. Il en découle

$$\forall i \in [\![\, 1 \,;\, n \,]\!] \qquad \mathrm{A}e_i = 0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})}$$

La famille $(e_1, \ldots, e_n)$ étant une base de $\mathbb{R}^n$, on conclut que $\mathrm{A} = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{R})}$.

$\boxed{\text{$\varphi$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire un produit scalaire, sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.}}$

3 Soient A et B deux matrices symétriques réelles positives. D'après le cours, la matrice B est diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une telle base, soient également $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ les valeurs propres, éventuellement confondues, associées à cette famille de vecteurs propres. Elles sont positives car B est positive. D'après le résultat de la question 1,

$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \mathrm{Tr}\left({}^t\mathrm{A}\,\mathrm{B}\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle {}^t\mathrm{A}\,\mathrm{B}e_i, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle {}^t\mathrm{A}\,e_i, e_i\rangle$$

par définition des λ_i et linéarité à gauche du produit scalaire. Puis

$$\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle e_i, \mathrm{A}e_i\rangle$$

Or, la matrice A est également symétrique réelle positive. Par conséquent,

$$\forall i \in [\![\, 1 \,;\, n \,]\!] \qquad \langle e_i, \mathrm{A}e_i\rangle \geqslant 0$$

d'où, par somme de nombres positifs, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle \geqslant 0$.

$\boxed{\text{Pour toutes matrices symétriques réelles positives A et B, $\langle \mathrm{A}, \mathrm{B}\rangle \geqslant 0$.}}$

> Dans ce sujet, une matrice symétrique réelle est dite positive lorsque ses valeurs propres sont positives ou nulles. Il s'agit habituellement d'une caractérisation et l'on définit usuellement les matrices symétriques réelles positives comme les matrices symétriques réelles telles que
> $$\forall \mathrm{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \langle \mathrm{AX}, \mathrm{X}\rangle \geqslant 0$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .