Mines Maths 2 PSI 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Martin (ENS Lyon) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Le sujet étudie des opérateurs sur l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des endomorphismes symétriques ($n \in \mathbb{N}^*$) qui étendent des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de la variable réelle : pour $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n$, on définit $f(\mathrm{M})$ comme l'unique endomorphisme symétrique tel que, pour tout vecteur propre u de M associé à une valeur propre λ, le vecteur u est un vecteur propre de $f(\mathrm{M})$ pour la valeur propre $f(\lambda)$. L'objectif de ce sujet est d'aboutir à l'inégalité de Löwner-Heinz, un résultat très important en théorie des opérateurs.

- La première partie introduit le quotient de Rayleigh d'un endomorphisme S défini pour tout vecteur x non nul par
$$\mathcal{Q}_{\mathrm{S}}(x) = \frac{(\mathrm{S}(x), x)}{||x||^2}$$
afin de caractériser les endomorphismes symétriques positifs et définis positifs par le signe de leurs valeurs propres. Puis on démontre plusieurs propriétés sur les opérateurs de $\mathcal{S}_n$. Enfin, on traite les exemples classiques des opérateurs inverse et racine carrée.
- La deuxième partie introduit la notion d'opérateur croissant de $\mathcal{S}_n$ après avoir défini une relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$. Les mêmes exemples qu'à la partie précédente sont abordés.
- La troisième partie propose d'établir l'inégalité de Löwner-Heinz qui exprime le fait que, pour tout $a \in \,]\,0\,;1\,[$, la fonction puissance
$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto t^a \end{cases}$$
s'étend en un opérateur croissant sur l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs. La démonstration fait appel à l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+$ d'une fonction vectorielle.

Ce sujet nécessite une connaissance et une compréhension solide du cours sur les endomorphismes symétriques (avoir oublié, par exemple, que tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable dans une base orthonormale peut être très préjudiciable). Les mêmes types de raisonnement étant utilisés tout au long du problème, il était préférable de ne pas sauter trop de questions, sous peine d'être bloqué très rapidement.

La difficulté reste modérée, hormis dans les questions 7 et 16 qui nécessitent une réflexion avancée, ainsi que, dans une moindre mesure, les questions 15 et 17. Attention toutefois à ne pas bâcler les questions « faciles », les correcteurs y sont sensibles et plus disposés à valoriser une copie où clarté et rigueur sont les maîtres mots.

Indications

Partie I

2 Considérer les vecteurs propres associés à $m(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}(\mathrm{T})$.

3 Se rappeler que tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable dans une base orthonormale.

5 Si $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{E}_i$ et que l'on souhaite définir une application linéaire u sur E égale à u_i sur E_i, alors, si l'on appelle p_i la projection orthogonale sur E_i, poser :

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i \circ p_i$$

7 Question assez subtile : penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange.

10 Considérer $g(t) = t$ et utiliser le résultat de la question 9.

11 Utiliser le résultat de la question 9. Puis, si C est une solution de $\mathrm{C}^2 = \mathrm{S}$ alors $\mathrm{C} \circ \mathrm{S} = \mathrm{C}^3 = \mathrm{S} \circ \mathrm{C}$ et par conséquent les sous-espaces propres de S sont stables par C. Pour le nombre de solutions dans $\mathcal{S}_n$, bien voir qu'il y a deux racines carrées possibles pour chaque valeur propre non nulle de S (une positive et une négative).

Partie II

13 Comme $\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n$, pour tout $\mathrm{V} \in \mathcal{L}_n$ on a $\big(\mathrm{U} \circ \mathrm{V} \circ \mathrm{U}(x), x\big) = \big(\mathrm{V}(\mathrm{U}(x)), \mathrm{U}(x)\big)$.

14 Regarder les valeurs propres de ${\mathrm{M}_2}^2 - {\mathrm{M}_1}^2$.

16 Considérer $\left(\mathrm{T}_2^{1/2} + \mathrm{T}_1^{1/2}\right) \circ \left(\mathrm{T}_2^{1/2} - \mathrm{T}_1^{1/2}\right)$.

Partie III

17 Remarquer que $f_u(t) = 1 - \dfrac{u}{t+u}$ et utiliser le résultat de la question 15.

18 Introduire une matrice de changement de base.

19 Pour l'intégrabilité, chercher des équivalents.

21 Utiliser le résultat de la question 17.

I. Fonctions d'endomorphismes symétriques

1 Un endomorphisme u est symétrique si pour tous vecteurs x et y de $\mathbb{R}^n$, on a $(u(x), y) = (x, u(y))$. Considérons $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n$ et $x, y \in \mathbb{R}^n$. En utilisant la bilinéarité du produit scalaire, on obtient :

$$\begin{aligned}
((\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2)(x), y) &= (\mathrm{T}_1(x) + \mathrm{T}_2(x), y) \\
&= (\mathrm{T}_1(x), y) + (\mathrm{T}_2(x), y) \\
&= (x, \mathrm{T}_1(y)) + (x, \mathrm{T}_2(y)) \qquad \text{car } \mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n \\
&= (x, \mathrm{T}_1(y) + \mathrm{T}_2(y)) \\
((\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2)(x), y) &= (x, (\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2)(y))
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2 \in \mathcal{S}_n$, ce qui signifie que

$$\boxed{\mathcal{S}_n \text{ est stable par somme.}}$$

> Comme $((\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2)(x), x) = (\mathrm{T}_1(x), x) + (\mathrm{T}_2(x), x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et que $\mathcal{S}_n$ est stable par somme, $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{+*}$ sont également stables par somme car la somme de deux termes (strictement) positifs est (strictement) positive.

2 Notons x_m et x_M deux vecteurs propres associés respectivement aux valeurs propres $m(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}(\mathrm{T})$. En particulier, x_m et x_M ne sont pas nuls.

> Tout endomorphisme symétrique réel a ses valeurs propres réelles. Par suite, le sous-ensemble $\sigma(\mathrm{T})$ de $\mathbb{R}$ est fini, il admet donc bien un plus petit et un plus grand élément.

Calculons maintenant $\mathcal{Q}_\mathrm{T}(x_m)$:

$$\mathcal{Q}_\mathrm{T}(x_m) = \frac{(\mathrm{T}(x_m), x_m)}{||x_m||^2} = \frac{(m(\mathrm{T})x_m, x_m)}{||x_m||^2} = m(\mathrm{T})\frac{(x_m, x_m)}{||x_m||^2} = m(\mathrm{T})$$

De même, $\mathcal{Q}_\mathrm{T}(x_\mathrm{M}) = \mathrm{M}(\mathrm{T})$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{Q}_\mathrm{T} \text{ atteint les valeurs } m(\mathrm{T}) \text{ et } \mathrm{M}(\mathrm{T}).}$$

3 Tout endomorphisme symétrique réel est diagonalisable dans une base orthonormale, i.e. on peut trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres. Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres de T et $\mathcal{B} = (x_1, \ldots, x_n)$ une base orthonormale de vecteurs propres associés. On fixe $y \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\}$ et on le décompose dans cette base : $y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$. Calculons maintenant $(\mathrm{T}(y), y)$:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}(y), y) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathrm{T}(x_i), \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i (\lambda_i x_i), \sum_{j=1}^n \alpha_j x_j\right) \\
&= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \lambda_i \alpha_i \alpha_j (x_i, x_j) \\
(\mathrm{T}(y), y) &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \qquad \text{car la base } \mathcal{B} \text{ est orthonormale}
\end{aligned}$$

Or $\qquad m(\mathrm{T})||y||^2 = m(\mathrm{T})\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i\alpha_i^2 \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{T})\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i^2 = \mathrm{M}(\mathrm{T})||y||^2$

Par conséquent, $\qquad m(\mathrm{T})||y||^2 \leqslant (\mathrm{T}(y), y) \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{T})||y||^2$

Comme $y \neq 0$, on a $\qquad m(\mathrm{T}) \leqslant \mathcal{Q}_\mathrm{T}(y) \leqslant \mathrm{M}(\mathrm{T})$

En outre, d'après la question 2, $\mathcal{Q}_\mathrm{T}$ atteint les valeurs $m(\mathrm{T})$ et $\mathrm{M}(\mathrm{T})$, d'où

$$\boxed{m(\mathrm{T}) = \operatorname*{Min}_{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \mathcal{Q}_\mathrm{T}(x) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{M}(\mathrm{T}) = \operatorname*{Max}_{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \mathcal{Q}_\mathrm{T}(x)}$$

4 Essayons d'utiliser habilement $\mathcal{Q}_\mathrm{T}$:

$$\begin{array}{rcll}
\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+ & \iff & \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \qquad (\mathrm{T}(x), x) \geqslant 0 & \\
& \iff & \forall x \in \mathbb{R}^n \smallsetminus \{0\} \qquad \mathcal{Q}_\mathrm{T}(x) \geqslant 0 & \text{car } ||x||^2 > 0 \\
& \iff & m(\mathrm{T}) = \operatorname*{Min}_{x\in\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}} \mathcal{Q}_\mathrm{T}(x) \geqslant 0 & \\
\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+ & \iff & \sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}_+ &
\end{array}$$

Pour $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^{+*}$, il suffit de remplacer les inégalités larges par des inégalités strictes.

> Attention, le passage à la borne inférieure (ou supérieure) ne préserve pas les inégalités strictes. Par exemple, la fonction exponentielle est toujours strictement positive et a une borne inférieure (sur $\mathbb{R}$) nulle. Dans le cas de $\mathcal{S}_n^{+*}$, le fait que $m(\mathrm{T})$ soit atteint est alors essentiel.

Ainsi, $\quad \boxed{\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^+ \iff \sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}_+ \qquad \text{et} \qquad \mathrm{T} \in \mathcal{S}_n^{+*} \iff \sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}_+^*}$

5 Commençons par montrer l'existence d'une telle application linéaire. Comme T est diagonalisable, on a :

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(\mathrm{T})} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I})$$

Notons p_λ la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I})$ et posons $\mathrm{U} = \sum\limits_{\lambda\in\sigma(\mathrm{T})} f(\lambda)p_\lambda$.

Tout d'abord, U est linéaire comme combinaison linéaire d'applications linéaires. Montrons que U vérifie bien (**3**). Soient $\lambda_0 \in \sigma(\mathrm{T})$ et $y \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - \lambda_0\mathrm{I})$, on a

$$\mathrm{U}(y) = \left(\sum_{\lambda\in\sigma(\mathrm{T})\smallsetminus\{\lambda_0\}} f(\lambda)\underbrace{p_\lambda(y)}_{=0}\right) + f(\lambda_0)\underbrace{p_{\lambda_0}(y)}_{=y} = f(\lambda_0)y$$

Par conséquent, il existe une application linéaire U vérifiant (**3**). Montrer qu'elle est unique. Considérons deux applications linéaires V et W vérifiant (**3**) :

$$\forall \lambda \in \sigma(\mathrm{T}) \quad \forall y \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{T} - \lambda\mathrm{I}) \qquad \mathrm{V}(y) = f(\lambda)y = \mathrm{W}(y)$$

Ainsi, $\mathrm{V} - \mathrm{W}$ coïncide avec l'application nulle sur chacun des sous-espaces propres. Comme $\mathbb{R}^n$ est somme directe de ces derniers, $\mathrm{V} - \mathrm{W} = 0$ i.e. $\mathrm{V} = \mathrm{W}$, d'où l'unicité.

$$\boxed{\text{Il existe une unique application linéaire U vérifiant } (\mathbf{3}).}$$

La matrice de U dans $\mathcal{B}$ est diagonale (avec $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$ sur la diagonale), elle est donc symétrique, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{U} \in \mathcal{S}_n}$$