Centrale Maths 2 PSI 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jules Svartz (ENS Cachan) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet d'algèbre s'organise en trois parties très largement indépendantes.

- La première partie concerne l'étude du haussdorfien d'une matrice, défini pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par

  $$\mathrm{R}(\mathrm{A}) = \{ {}^t\mathrm{X}\mathrm{A}\mathrm{X} \mid \|\mathrm{X}\| = 1 \}$$

  L'objectif est principalement d'établir (sans que ce soit dit explicitement) qu'il s'agit d'une partie convexe de $\mathbb{R}$ qui contient notamment les valeurs propres et les éléments diagonaux de la matrice, ainsi que sa trace sous certaines conditions. On justifie également que cet ensemble est invariant par changement de base orthogonale.
- La deuxième partie introduit la notion incontournable, bien que hors programme, de matrice symétrique positive. Après quelques questions aboutissant à des inégalités sur leurs déterminants, on établit un résultat qui rappellera étrangement une propriété bien classique des suites réelles : pour une relation d'ordre bien choisie, on démontre que toute suite croissante et majorée de matrices symétriques positives est convergente.
- La troisième partie démarre comme la deuxième par une nouvelle notion hors-programme de matrice symétrique définie positive. L'objectif est à nouveau d'établir des inégalités sur des déterminants, et notamment la jolie formule

  $$\det(\alpha_1 \mathrm{A}_1 + \cdots + \alpha_k \mathrm{A}_k) \geqslant \det(\mathrm{A}_1)^{\alpha_1} \cdots \det(\mathrm{A}_k)^{\alpha_k}$$

  pour tous réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ et toutes matrices $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k$ symétriques définies positives. Le rapprochement avec les comparaisons des moyennes arithmétique et géométrique est bien entendu immédiat.

Le sujet manipule donc en long, en large et en travers les matrices symétriques positives. Cette notion est hors programme en PC/PSI mais elle survient très fréquemment aux concours, au point que la plupart des enseignants de CPGE dans ces deux filières ont un paragraphe à leur sujet dans leur cours. La plupart des résultats présentés ici sont d'ailleurs des classiques d'oraux de la filière MP. En ce sens, l'épreuve est plutôt décevante car même si chaque résultat pris séparément est intéressant, l'absence de lien entre les parties est évident, et aucune application sérieuse de ces résultats n'est présentée.

Indications

Partie I

I.A Considérer X un vecteur propre de A, supposé de norme 1, et calculer ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX}$.

I.B.1 Montrer que les éléments diagonaux de A s'obtiennent en calculant ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX}$ pour X variant dans la base canonique.

I.B.2 Calculer ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX}$ pour tout vecteur X.

I.C.1 Montrer qu'une relation de dépendance entre X_1 et X_2 s'écrit $\mathrm{X}_2 = \pm\,\mathrm{X}_1$.

I.C.2 Remarquer que la fonction ϕ est une fraction rationnelle.

I.C.3 Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

I.E Observer qu'une isométrie vectorielle réalise une bijection entre les vecteurs de norme 1.

I.F.2 Considérer X_1 un vecteur de norme 1 tel que ${}^t\mathrm{X}_1\,\mathrm{AX}_1 = x$, et compléter la famille (X_1) en une base orthonormale $(\mathrm{X}_1,\ldots,\mathrm{X}_n)$. Poser ensuite Q_1 la matrice dont les vecteurs colonnes sont les X_i.

I.F.5 Lors de la récurrence on obtiendra une matrice $\widetilde{\mathrm{Q}_2}$ telle que ${}^t\widetilde{\mathrm{Q}_2}\,\mathrm{B}\widetilde{\mathrm{Q}_2}$ a sa diagonale de la forme $(0,\ldots,0)$. Introduire ensuite la matrice Q_2 dont le bloc carré inférieur droit de taille $n-1$ est $\widetilde{\mathrm{Q}_2}$, et compléter par un 1 en position $(1,1)$ et des zéros ailleurs.

Partie II

II.A Diagonaliser A en utilisant le théorème spectral et utiliser la question I.E.

II.B Se ramener au cas d'une matrice diagonale.

II.D.2 Se ramener à X de norme 1 et utiliser la question II.A.

II.D.3 Utiliser le résultat de la question II.B.1.

II.E.2 Développer l'expression $\det(\mathrm{A}+\mathrm{B})$ et utiliser la question précédente.

II.F.1 Il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz si et seulement si les vecteurs sont liés.

II.G Une relation d'ordre est une relation réflexive, antisymétrique et transitive. Pour la transitivité, en prenant S,S' et S'' symétriques telles que $\mathrm{S}'-\mathrm{S} \geqslant 0$ et $\mathrm{S}''-\mathrm{S}' \geqslant 0$, on pourra considérer un vecteur propre de $\mathrm{S}''-\mathrm{S}$ et utiliser la question II.D.2.

Partie III

III.A Utiliser le théorème spectral. Une matrice diagonale $\mathrm{D_A}$ semblable à A ayant ses valeurs propres strictement positives, on pourra considérer une de ses racines carrées, c'est-à-dire une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont des racines carrées de ceux de D.

III.B Remarquer que ${}^t(\mathrm{Y}^{-1})\,\mathrm{BY}^{-1}$ est symétrique.

III.C.1 On pourra diagonaliser B.

III.C.2 Montrer que la matrice D obtenue à la question III.B est définie positive. Appliquer ensuite le résultat de la question III.C.1 à $\det(\mathrm{I}_n+\mathrm{D})$.

III.D Introduire la fonction $x \mapsto x^\beta$ et montrer qu'elle est concave.

III.E Utiliser les matrices T et D de la question III.B, ainsi que la question III.D.

III.F Pour dérouler correctement la récurrence, justifier qu'une combinaison linéaire à coefficients strictement positifs de matrices symétriques définies positives est symétrique définie positive.

I. Généralités

I.A Soient λ une valeur propre réelle de A et X un vecteur propre associé à λ. Le vecteur $\mathrm{Y} = \mathrm{X}/\|\mathrm{X}\|$ est ainsi de norme 1 et est également un vecteur propre associé à λ. De plus ${}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{AY} = {}^t\mathrm{Y}\,\lambda\mathrm{Y} = \lambda\|\mathrm{Y}\|^2 = \lambda$. Par suite λ appartient à R(A). En conclusion,

$$\boxed{\text{Les valeurs propres réelles de A sont dans R(A).}}$$

I.B.1 Soit $i \in \{1,\ldots,n\}$. Posons $\mathrm{Y}_i = {}^t(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (1 en position i) le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathrm{AY}_i = {}^t(a_{1,i},\ldots,a_{n,i})$ est le i-ème vecteur colonne de A et ${}^t\mathrm{Y}_i\,\mathrm{AY}_i$ est le i-ème coefficient de AY_i, c'est-à-dire $a_{i,i}$. Puisque Y_i est de norme 1, $a_{i,i} \in \mathrm{R(A)}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Les éléments diagonaux de A sont dans R(A).}}$$

I.B.2 Soit $\mathrm{X} = {}^t(x,y)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. Alors ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{A} = (-y,x)$ et ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} = -xy + xy$ est nul. En particulier, pour tout vecteur X de $\mathbb{R}^2$ de norme 1, ${}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} = 0$ et donc $\mathrm{R(A)} = \{0\}$. Ainsi -1 et 1, qui sont les éléments hors diagonale de A, ne sont pas dans R(A).

$$\boxed{\text{Les éléments } a_{i,j} \text{ pour } i \neq j \text{ ne sont pas nécessairement dans R(A).}}$$

I.C.1 Supposons la famille $(\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2)$ liée. Puisque X_1 et X_2 sont deux vecteurs réels de même norme,

- soit $\mathrm{X}_2 = \mathrm{X}_1$, auquel cas ${}^t\mathrm{X}_2\,\mathrm{AX}_2 = {}^t\mathrm{X}_1\,\mathrm{AX}_1 = a \neq b$, ce qui est absurde ;
- soit $\mathrm{X}_2 = -\mathrm{X}_1$, auquel cas ${}^t\mathrm{X}_2\,\mathrm{AX}_2 = {}^t(-\mathrm{X}_1)\,\mathrm{A}(-\mathrm{X}_1) = {}^t\mathrm{X}_1\,\mathrm{AX}_1 = a \neq b$, ce qui est absurde également.

Par conséquent, $\boxed{\mathrm{X}_1 \text{ et } \mathrm{X}_2 \text{ sont linéairement indépendants.}}$

I.C.2 Puisque X_1 et X_2 sont linéairement indépendants, le vecteur X_λ est non nul pour tout $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. Ainsi $\|\mathrm{X}_\lambda\|$ n'est jamais nul et

$$\boxed{\phi \text{ est définie sur l'intervalle } [\,0\,;1\,].}$$

Par ailleurs, l'application $\lambda \mapsto \mathrm{X}_\lambda$ étant une application affine de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^n$, elle est continue. De plus, les applications

$$\mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{AX} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{X} \mapsto {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{X} = \|\mathrm{X}\|^2$$

sont continues de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$ par continuité du produit matriciel. Enfin, l'application $(x,y) \mapsto x/y$ est continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$. Comme ϕ s'écrit comme composée d'applications continues,

$$\boxed{\phi \text{ est continue sur } [\,0\,;1\,].}$$

I.C.3 Remarquons que pour $\lambda = 0$, $X_\lambda = X_2$ et pour $\lambda = 1$, $X_\lambda = X_1$ (la notation est maladroite mais il n'y a pas d'ambiguïté !). Ainsi, $\phi(0) = b$ et $\phi(1) = a$. Soit $t \in [\,a\,;b\,]$. ϕ étant continue, le théorème des valeurs intermédiaires s'applique et il existe $\lambda \in [\,0\,;1\,]$ tel que $\phi(\lambda) = t$. Comme on l'a remarqué à la question précédente, X_λ n'est jamais nul. Par suite, $Y_\lambda = X_\lambda / \|X_\lambda\|$ est de norme 1 et vérifie ${}^t Y_\lambda\, A Y_\lambda = \phi(\lambda) = t \in R(A)$. En conclusion,

$$\boxed{[\,a\,;b\,] \subset R(A)}$$

I.D D'après la question I.B.1, les éléments diagonaux de A sont dans R(A). Supposons que Tr A = 0.

- Si tous les éléments $a_{i,i}$ sont nuls alors $0 \in R(A)$.
- Sinon, puisque $\text{Tr } A = a_{1,1} + \cdots + a_{n,n} = 0$, il existe deux entiers i et j distincts tels que $a = a_{i,i} < 0 < a_{j,j} = b$. Par conséquent, d'après la question précédente, $[\,a\,;b\,] \subset R(A)$. Puisque $0 \in [\,a\,;b\,]$, on conclut que 0 est dans R(A).

Conclusion : $\boxed{\text{Si Tr A} = 0 \text{ alors 0 appartient à R(A).}}$

I.E Puisque Q est orthogonale, l'application associée est une isométrie, donc pour tout vecteur X de norme 1, QX est également de norme 1. Réciproquement, puisque Q est inversible et que Q^{-1} est également orthogonale, pour tout élément X de norme 1, $\|Q^{-1}X\| = 1$ et $X = Q(Q^{-1}X)$. Ainsi $X \mapsto QX$ est une bijection de la sphère unité sur elle-même et

$$\{QX \mid X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid \|X\| = 1\}$$

Par suite,
$$\begin{aligned} R({}^t Q\, AQ) &= \{\, {}^t X\, {}^t Q\, AQX \mid X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\} \\ &= \{\, {}^t (QX)\, A(QX) \mid X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\} \\ R({}^t Q\, AQ) &= \{\, {}^t X\, AX \mid X \in \mathbb{R}^n, \|X\| = 1\} \end{aligned}$$

Par conséquent $\boxed{R({}^t Q\, AQ) = R(A)}$

I.F.1 Supposons `(C2)`. Alors l'élément en position $(1,1)$ de ${}^t Q\, AQ$ est Tr A. D'après le résultat de la question I.E, $R({}^t Q\, AQ) = R(A)$ et l'on a montré en question I.B.1 que $\text{Tr } A \in R({}^t Q\, AQ)$. Par conséquent, $\text{Tr } A \in R(A)$ et l'on a montré que

$$\boxed{\text{La condition (C2) implique la condition (C1).}}$$

I.F.2 Puisque $x \in R(A)$, il existe un vecteur X_1 de norme 1 tel que ${}^t X_1\, AX_1 = x$. Le sous-espace vectoriel $F = (X_1)^\perp$ est de dimension $n-1$ et c'est un espace vectoriel euclidien si on le munit du produit scalaire canonique défini sur E. D'après le cours, il existe une base orthonormale $(X_2, \ldots, X_n)$ de E. Puisque $F = (X_1)^\perp$, la famille $(X_1, \ldots, X_n)$ forme une base orthonormale de E.

> Un théorème hors-programme stipule que toute famille orthonormale d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormale : c'est le théorème de la base orthonormale incomplète.