Centrale Maths 1 PSI 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Batog (Professeur agrégé) ; il a été relu par Florence Monna (Doctorante en mathématiques) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Ce problème traite de la transformée de Laplace $\mathrm{L}f$ (et quelques fois de sa généralisation) d'une fonction f continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\mathrm{L}f : x \longmapsto \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}t$$

Il est composé de 8 parties, largement indépendantes entre elles dès la deuxième.

- La première partie propose d'étudier dans le cas général l'ensemble E (resp. E') des réels x pour lesquels l'intégrale $\mathrm{L}f(x)$ converge absolument (resp. simplement). La continuité de $\mathrm{L}f$ sur E est établie.
- La deuxième partie propose de nombreux exemples dans le cas où la fonction f est positive. L'objectif consiste à chaque fois à déterminer le domaine E de convergence absolue. La partie se termine par le calcul de l'intégrale de Gauss à l'aide d'une technique classique de dérivation.
- La troisième partie permet d'obtenir un développement asymptotique de $\mathrm{L}f$ pour une fonction f particulière, prétexte à des calculs sur les séries entières.
- La quatrième partie porte sur des propriétés générales de la transformée de Laplace : classe $\mathscr{C}^\infty$, étude asymptotique en $+\infty$ et en 0. Elle nécessite un peu d'analyse fine et beaucoup de rigueur.
- La cinquième partie embraye sur un nouvel exemple, avec à nouveau la détermination de E et E' suivie de calcul intégral. Elle se négocie en roue libre, excepté une question portant sur la convergence uniforme d'une série de fonctions.
- La sixième partie, autonome, montre l'injectivité de la transformation de Laplace $\mathrm{L} : f \mapsto \mathrm{L}f$.
- La septième partie, pas si facile, étudie $\mathrm{L}f$ en la borne inférieure du domaine E de convergence absolue. Il apparaît toujours de gros théorèmes d'analyse et une dernière détermination d'un ensemble E' de convergence.
- La huitième partie présente une utilisation de la transformation L pour résoudre une équation différentielle, en vue de déterminer les éléments propres de l'opérateur U sur $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ défini par

  $$\forall\,\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}] \quad \forall\,t \in \mathbb{R} \qquad \mathrm{U}(\mathrm{P})(t) = \mathrm{e}^{\,t}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(t\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{P}'(t)\Big)$$

  Une dose d'algèbre est introduite via un produit scalaire complexe étudié en début de partie, très accessible. Les dernières questions nécessitent d'utiliser des résultats noyés dans le problème.

Ce sujet semble avoir été conçu pour occuper l'étudiant coûte que coûte : les parties s'enchaînent sans ligne directrice et les exemples sont multipliés pour couvrir le plus de techniques et de gros théorèmes d'analyse possibles. En outre, l'étude de la semi-convergence des intégrales est surabondante alors qu'il ne s'agit pas d'un objectif du programme officiel. C'est pourquoi ce sujet sera plus utile en y piochant des parties pour réviser les écrits (voire pour préparer des planches d'oral !) qu'en l'abordant linéairement.

Indications

Partie I

I.B Choisir un élément x_0 dans E et montrer que l'intégrale $\mathrm{L}f(x)$ converge absolument pour tout $x \geqslant x_0$ par comparaison avec $\mathrm{L}f(x_0)$. Rappelons la définition d'un intervalle I de $\mathbb{R}$: pour tous a, b et c dans I,

$$\big(a \leqslant b \leqslant c \quad \text{et} \quad a \in \mathrm{I} \quad \text{et} \quad c \in \mathrm{I}\big) \qquad \Longrightarrow \qquad b \in \mathrm{I}$$

I.C Vérifier scrupuleusement chacune des hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale.

Partie II

II.B.1 Intégrer. Justifier que $\lambda(\mathrm{A}) \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} +\infty$.

II.B.2 Montrer que $f(t)\,\mathrm{e}^{-xt} \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II.B.3 Comparer $\mathrm{L}f(x)$ à une intégrale de Riemann pour tout $x \in \mathbb{R}$.

II.C.1 Pour déterminer E, il suffit de montrer que $\mathrm{L}f(x)$ diverge pour $x < 0$ et que $\mathrm{L}f(0)$ converge.

II.C.2 Appliquer le théorème de dérivation sous le signe intégrale en vérifiant l'hypothèse de domination sur tout segment inclus dans E.

II.C.3 Écrire $\mathrm{L}f(x) - (\mathrm{L}f)'(x)$ sous forme d'une intégrale où l'on effectue le changement de variable $u = t\sqrt{x}$.

II.C.4 Dériver g, reconnaître $\mathrm{A}/\sqrt{x}$ puis intégrer.

II.C.5 Effectuer le changement de variable $t = u^2$ dans l'intégrale de la question précédente.

Partie III

III.C Utiliser le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions après avoir trouvé un développement en série de la fonction intégrée dans $\mathrm{L}f(x)$.

III.D Montrer que la série $\sum h_n$ de fonctions, où $h_n : x \mapsto 1/(n+x)^2$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $n \geqslant 1$, converge uniformément sur $[\,0\,;1\,[$.

Partie IV

IV.A Démontrer par récurrence sur n que $\mathrm{L}f$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $]\,\alpha\,;+\infty\,[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en utilisant la formule de dérivation sous le signe intégrale.

IV.C.1 Majorer la valeur absolue de l'intégrale en utilisant la définition de $\mathrm{O}(t^{n+1})$.

IV.C.2 Il reste à dominer l'intégrale sur $[\,\beta\,;+\infty\,[$ de la même fonction qu'à la question précédente. Utiliser la majoration suivante avec $y < x$ dans E :

$$\forall t \in [\,\beta\,;+\infty\,[\qquad \mathrm{e}^{-xt} \leqslant \mathrm{e}^{-(x-y)\beta}\,\mathrm{e}^{-yt}$$

IV.D.2 Raisonner avec des ε : vérifier que

$$x\,\mathrm{L}f(x) - \ell = \int_0^{+\infty} \big(f(t) - \ell\big)\,x\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

et découper l'intégrale obtenue de façon adaptée afin d'utiliser une majoration $|f(t) - \ell| \leqslant \varepsilon/2$ découlant de la définition de la limite pour f.

Partie V

V.A Montrer que $\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V.C Effectuer une intégration par parties.

V.E Calculer l'intégrale complexe $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{e}^{\,-xt}\,\mathrm{d}t$.

V.F Pour $\mathrm{N} \geqslant 1$ et $x \geqslant 0$, considérer le reste

$$\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(x) = \mathrm{L}f(x) - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} f_n(x) = \int_{(\mathrm{N}+1)\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{e}^{\,-xt}\,\mathrm{d}t$$

de la série $\sum f_n$. Grâce à une intégration par parties, démontrer que

$$\mathop{\mathrm{Sup}}_{x\in[\,0\,;+\infty\,[} |\mathrm{R}_{\mathrm{N}}(x)| \xrightarrow[\mathrm{N}\to+\infty]{} 0$$

Partie VI

VI.A.2 Penser au théorème de Weierstrass.

VI.B.1 Intégrer par parties.

VI.B.2 Effectuer le changement de variable $t = -(\ln u)/a$ dans l'intégrale de la question précédente.

VI.B.3 La fonction $u \mapsto h\big(-(\ln u)/2\big)$ joue le rôle de g dans la question VI.A.

Partie VII

VII.A.1 Utiliser la définition de l'intégrabilité : pour tout segment $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}_+$,

$$\forall\, x \in \mathrm{E} \qquad \int_{\mathrm{I}} f(t)\,\mathrm{e}^{\,-xt}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{L}f(x) \leqslant \mathop{\mathrm{Sup}}_{t\in\mathrm{E}} \mathrm{L}f(t)$$

puis utiliser le théorème de continuité sous le signe intégrale pour $x \to \alpha$.

VII.A.2 Remarquer que la fonction $\mathrm{L}f$ est décroissante sur E.

VII.B.1 Raisonner comme à la question V.A pour l'intégrale $\mathrm{L}f(1)$.

VII.B.2 Utiliser des intégrations par parties.

VII.B.3 Intégrer par parties et utiliser le théorème de convergence dominée pour calculer la limite de l'intégrale obtenue.

Partie VIII

VIII.B Rappelons qu'un produit scalaire complexe sur E diffère d'un produit scalaire réel par le fait qu'il est simplement semi-linéaire à gauche et qu'il est hermitien, c'est-à-dire que $\langle \mathrm{Q},\mathrm{P}\rangle = \overline{\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle}$ pour tout $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2$.

VIII.C Ne pas oublier de démontrer que $\mathrm{U}(\mathrm{P})$ est un élément de $\mathcal{P}$ pour tout $\mathrm{P} \in \mathcal{P}$.

VIII.D L'égalité s'obtient grâce à deux intégrations par parties successives.

VIII.G.1 En appliquant la transformation L à (E_n), montrer l'équation

$$0 = -\mathrm{L}(\mathrm{P}'')'(x) + \mathrm{L}(\mathrm{P}')(x) + \mathrm{L}(\mathrm{P}')'(x) + n\,\mathrm{L}(\mathrm{P})(x)$$

puis exprimer $\mathrm{L}(\mathrm{P}')$, $\mathrm{L}(\mathrm{P}'')$ et leurs dérivées en fonction de $\mathrm{Q} = \mathrm{L}(\mathrm{P})$ grâce à deux intégrations par parties successives de $\mathrm{L}(\mathrm{P})$.

VIII.G.2 L'ensemble des solutions de (E'_n) forme une droite vectorielle engendrée par $\mathrm{Q}_n : x \mapsto (x-1)^n/x^{n+1}$. En développant $(x-1)^n$, reconnaître une expression du résultat de la question IV.B.

VIII.G.3 Dériver n fois avec la formule de Leibniz.

I. Préliminaires, définition de la transformation L

I.A Par définition, la fonction $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\right| \mathrm{d}t$ est convergente. Or une intégrale absolument convergente est convergente. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{E} \subseteq \mathrm{E}'}$$

I.B Supposons que E soit non vide, c'est-à-dire qu'il contienne un élément, noté x_0. Pour tous $x \geqslant x_0$ et $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\left|f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}\right| = |f(t)|\ \mathrm{e}^{-\lambda(t)x} \leqslant |f(t)|\ \mathrm{e}^{-\lambda(t)x_0} \qquad (\mathbf{1})$$

car la fonction $u \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda(t)u}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ puisque $\lambda(t)$ est positif pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme $x_0 \in \mathrm{E}$, la fonction $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x_0}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on déduit de l'inégalité (1) que $t \mapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc $x \in \mathrm{E}$ pour tout $x \geqslant x_0$. Ainsi, l'intervalle $[\,x_0\,;+\infty\,[$ est inclus dans E. Par conséquent,

$$\boxed{\text{E est non majoré.}}$$

Montrons que E est un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient x_1 et x_2 deux éléments de E tels que $x_1 \leqslant x_2$. D'après le raisonnement précédent, $[\,x_1\,;+\infty\,[$ est inclus dans E, d'où

$$\forall x \in [\,x_1\,;x_2\,] \qquad x \in \mathrm{E}$$

Puisque cette propriété est vérifiée pour tous x_1, $x_2 \in \mathrm{E}$,

$$\boxed{\text{E est un intervalle de } \mathbb{R}.}$$

I.C Supposons E non vide. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité sous le signe intégrale pour la fonction

$$\psi\colon \begin{cases} \mathrm{E} \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x,t) \ \longmapsto f(t)\,\mathrm{e}^{-\lambda(t)\,x} \end{cases}$$

- La fonction ψ est définie sur $\mathrm{E} \times \mathbb{R}_+$ avec E un intervalle de $\mathbb{R}$ (question I.B).
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\psi(\cdot,t)$ est continue sur E (car exp est continue sur $\mathbb{R}$).
- Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\psi(x,\cdot)$ est continue (donc continue par morceaux) sur $\mathbb{R}_+$ par produit et composée sur les fonctions continues (f et λ sont continues sur $\mathbb{R}_+$ d'après l'énoncé).
- Pour tout $x \in \mathrm{E}$, $\psi(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ d'après la définition de E.
- Soit $[\,x_0\,;x_1\,]$ un segment inclus dans E (non vide). Pour tous $x \in [\,x_0\,;x_1\,]$ et $t \geqslant 0$, l'inégalité (1) de la question I.B fournit une domination de $\psi(x,\cdot)$ par une fonction continue positive intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

D'après le théorème de continuité sous le signe intégrale, la fonction

$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} \psi(x,t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{L}f(x)$$

est continue sur tout segment inclus dans E donc sur E tout entier. En conclusion,

$$\boxed{\text{Si E est non vide, alors L}f \text{ est continue sur E.}}$$