CCP Maths 2 PSI 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Samuel Baumard (ENS Ulm) ; il a été relu par Jules Svartz (ENS Cachan) et Gilbert Monna (Professeur en CPGE).

Cette épreuve traite de quelques propriétés spectrales des matrices dites stochastiques, c'est-à-dire des matrices carrées à coefficients positifs dont la somme des coefficients sur chaque ligne vaut 1. Une matrice stochastique regroupe des probabilités de changement d'état d'un système (automatique, physique, biologique, etc.) au cours de chaque intervalle d'une suite d'instants : son coefficient (i, j) désigne la probabilité de passer de l'état i vers l'état j entre deux instants. Un tel processus probabiliste est appelé chaîne de Markov. Le sujet se concentre sur le cas où tous les coefficients sont non nuls.

- Dans la première partie, on s'intéresse au cas des matrices de taille 3. On montre l'équivalence suivante : pour tout nombre complexe λ tel que $|\lambda| < 1$ et $\operatorname{Im} \lambda > 0$, λ est l'affixe d'un point appartenant à un triangle particulier du plan si, et seulement si, il existe une matrice stochastique ayant λ comme valeur propre.
- Dans la seconde partie, on prouve des résultats généraux sur le spectre d'une matrice stochastique A de taille quelconque : confinement du spectre au disque unité, puis construction d'un vecteur privilégié Ω du sous-espace propre de ${}^t\mathrm{A}$ associé à la valeur propre 1. On se sert de ce vecteur Ω pour redémontrer le résultat de confinement, et pour finalement prouver que 1 est valeur propre de multiplicité un.

Les auteurs de sujets de concours affectionnent particulièrement les matrices stochastiques ; il faut avoir traité ce type de sujet au moins une fois avant les concours !

Indications

Partie I

I.1 Voir le triangle ouvert comme l'intersection de trois demi-plans ouverts.

I.2.2 La trace d'une matrice est aussi la somme de ses valeurs propres comptées avec multiplicités.

I.2.4 Réécrire en fonction de a et b l'inégalité précédente, puis développer et factoriser en faisant apparaître une différence de carrés.

I.2.5 Dessiner les régions déterminées par les inégalités de la question précédente.

I.3.2 Pour prouver la positivité des coefficients, exploiter le fait que $\mathrm{M}(\lambda)$ est supposé appartenir à T.

I.3.4 Commencer par montrer que A est diagonalisable.

Partie II

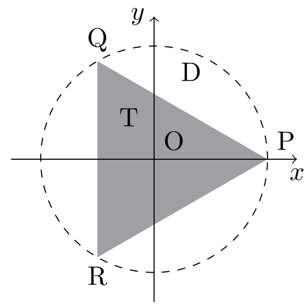
II.2.3 On pourra se servir de l'identité $|z_1 - z_2|^2 = |z_1|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2$.

II.3.3 Ou bien tous les coefficients de $\mathrm{X} - (x_1/y_1)\mathrm{Y}$ sont nuls, ou bien aucun ne l'est.

II.5.4 Penser à utiliser le fait que dans la décomposition de la question II.5.2, les sous-espaces en présence sont stables par A.

Partie I

I.1 Le triangle T est un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité (cf. figure ci-contre). Donnons à présent les équations des trois droites définissant le triangle PQR, en commençant par (PQ). Comme $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} = (-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2$, le point Q a pour coordonnées cartésiennes $(-1/2, \sqrt{3}/2)$. Un point $\mathrm{M}(x+\mathrm{i}y)$ appartient donc à (PQ) si et seulement si les deux droites (MP) et (PQ) sont confondues, ce que l'on traduit par l'annulation du déterminant correspondant ; par conséquent, une équation cartésienne de la droite (PQ) est



$$0 = \begin{vmatrix} 1-x & -3/2 \\ -y & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(1-x) - \frac{3}{2}\,y$$

soit
$$\boxed{(\mathrm{PQ}) : \quad x + \sqrt{3}\,y - 1 = 0}$$

On procède de même pour les deux autres droites : pour (PR),

$$0 = \begin{vmatrix} 1-x & -3/2 \\ y & \sqrt{3}/2 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(1-x) + \frac{3}{2}\,y$$

soit
$$\boxed{(\mathrm{PR}) : \quad x - \sqrt{3}\,y - 1 = 0}$$

et (QR) est orthogonale à l'axe des abscisses et passe par le point $(-1/2, 0)$, donc

$$\boxed{(\mathrm{QR}) : \quad 2x + 1 = 0}$$

> L'équation de (PR) se déduit de celle de (PQ), et inversement, en remarquant que chacune est la symétrique de l'autre par rapport à l'axe des abscisses, et donc que leurs équations ne diffèrent que par le signe du coefficient devant y.

Pour décrire les côtés du triangle T, il suffit d'ajouter la condition $x^2 + y^2 \leqslant 1$ à chacune de ces équations cartésiennes, puisque les côtés de T sont les intersections des droites (PQ), (QR) et (PR) avec le disque unité fermé défini par $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Passons aux conditions d'appartenance d'un point $\mathrm{M}(x+\mathrm{i}y)$ à T. Par définition, le triangle ouvert T est l'intersection de trois demi-plans ouverts délimités par chacun de ses côtés, et contenant chacun l'origine. Lorsqu'une droite admet une équation cartésienne de la forme $ax + by = c$ avec $c \neq 0$, elle détermine deux demi-plans ouverts, définis par les inéquations $ax+by-c < 0$ et $ax+by-c > 0$. Il suffit alors de remplacer (x, y) par $(0, 0)$ pour déterminer lequel de ces deux demi-plans contient l'origine. Dans le cas du côté PQ, par exemple, le demi-plan qui contient $(0, 0)$, et donc dans lequel est inclus T, est déterminé par l'équation $x+\sqrt{3}\,y-1 < 0$. On conclut que

$$\boxed{\mathrm{M}(x+\mathrm{i}\,y) \in \mathrm{T} \iff \begin{cases} x + \sqrt{3}\,y - 1 < 0 \\ \quad\ 2\,x + 1 > 0 \\ x - \sqrt{3}\,y - 1 < 0 \end{cases}}$$

I.2.1 Il suffit d'utiliser la condition (2) de la propriété $(\mathcal{ST} > 0)$: si l'on considère le vecteur $\mathrm{U} = {}^t(1\ 1\ 1)$, on a pour tout $i \in [\![1;3]\!]$ l'égalité $(\mathrm{AU})_i = a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3} = 1$, soit $\mathrm{AU} = \mathrm{U}$. Comme U est non nul, on en déduit que

$$\boxed{1 \text{ est valeur propre de A.}}$$

I.2.2 Comme A possède par hypothèse trois valeurs propres distinctes, elle est diagonalisable ; on peut par conséquent écrire $\mathrm{A} = \mathrm{P}\Delta\,\mathrm{P}^{-1}$ où P est une matrice inversible et $\Delta = \mathrm{diag}(1, \lambda, \overline{\lambda})$. Par suite, $\mathrm{A}^2 = \mathrm{P}\,\Delta^2\,\mathrm{P}^{-1}$ avec $\Delta^2 = \mathrm{diag}(1, \lambda^2, \overline{\lambda^2})$ et, comme deux matrices semblables ont la même trace, on trouve

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 1 + \lambda + \overline{\lambda} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2) = 1 + \lambda^2 + \overline{\lambda^2}}$$

Calculons
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{A}) &= 1 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda) \\ &= 1 + 2\,\mathrm{Re}(a + b\,\mathrm{i}) \end{aligned}$$
$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = 1 + 2\,a}$$

et
$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2) &= 1 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda^2) \\ &= 1 + 2\,\mathrm{Re}\big((a + b\,\mathrm{i})^2\big) \end{aligned}$$
$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2) = 1 + 2\,(a^2 - b^2)}$$

I.2.3 Par la condition (1) de la propriété ($\mathcal{ST} > 0$), on a

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i} > 0}$$

Par ailleurs,
$$\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2) = \sum_{i=1}^{3} (\mathrm{A}^2)_{i,i} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{i,j}a_{j,i}$$

ce qui, puisque $a_{i,j}a_{j,i} > 0$ pour $i \neq j$, donne bien la minoration

$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2) > \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}^2} \qquad (\star)$$

Appliquons comme indiqué l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs u et v, pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^3$; elle s'écrit

$$(u \mid v)^2 \leqslant \|u\|^2\,\|v\|^2$$

soit
$$(a_{1,1} + a_{2,2} + a_{3,3})^2 \leqslant 3\,(a_{1,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{3,3}^2)$$

et par $(\star)$
$$\boxed{\mathrm{Tr}(\mathrm{A})^2 < 3\,\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^2)}$$

I.2.4 Grâce à la question I.2.2 et à la minoration de Tr A, on a directement

$$\boxed{2\,a + 1 > 0}$$

De plus, la dernière inégalité de la question précédente se réécrit

$$3\,\big(1 + 2\,(a^2 - b^2)\big) > (1 + 2\,a)^2$$

que l'on développe
$$3 + 6\,a^2 - 6\,b^2 > 1 + 4\,a + 4\,a^2$$

d'où
$$2 - 4\,a + 2\,a^2 > 6\,b^2$$

puis en divisant par 2
$$1 - 2\,a + a^2 > 3\,b^2$$

où l'on reconnaît un carré
$$(a - 1)^2 > 3\,b^2$$

soit
$$(a - 1)^2 - 3\,b^2 > 0$$

qui se factorise
$$\boxed{(a - \sqrt{3}\,b - 1)(a + \sqrt{3}\,b - 1) > 0}$$
comme voulu.