CCP Maths 1 PSI 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Silvère Gangloff (ENS Ulm) ; il a été relu par Juliette Brun-Leloup (Professeur en CPGE) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Le sujet présente plusieurs méthodes élémentaires pour résoudre des équations différentielles linéaires.

- La première partie illustre sur un exemple deux méthodes de résolution d'une équation différentielle matricielle de la forme $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t) + \mathrm{B}(t)$ où A est une matrice constante à coefficients réels et $t \mapsto \mathrm{B}(t)$ une fonction vectorielle continue. La première méthode donne la solution générale complexe de l'équation homogène associée et utilise les quantités propres de la matrice. La seconde fournit la solution générale réelle en éliminant successivement les inconnues.
- La deuxième partie introduit la matrice résolvante, prouve certaines de ses propriétés et montre comment l'utiliser pour trouver une solution particulière d'une équation différentielle matricielle de la forme $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{X}(t) + \mathrm{B}(t)$, c'est-à-dire lorsque la matrice A n'est plus constante. Cette méthode s'inspire de la méthode de la variation de la constante pour les équations différentielles linéaires d'ordre 1.
- Enfin, la troisième partie est la plus subtile, en particulier la dernière question. Elle illustre au passage la méthode de recherche de solutions d'équations différentielles linéaires scalaires à coefficients polynomiaux, mais surtout traite un exemple de résolution d'une telle équation en utilisant les résultats de la deuxième partie sur la résolvante et un cas où le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire ne s'applique pas.

Les outils mis en œuvre dans ce sujet sont : la théorie de la réduction des endomorphismes, les séries entières, et bien sûr les équations différentielles linéaires. Il demande une bonne dextérité en calcul élémentaire et calcul matriciel. L'ensemble constitue un bon exercice sur ces points, en application des cours correspondants.

Indications

Partie I

I.2.1 Pour calculer les valeurs propres, penser au lien entre valeurs propres et racines du polynôme caractéristique. Pour le système fondamental de solutions, on peut se souvenir qu'une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres différentes est libre.

I.2.2 Pour la recherche de la solution x_3, on peut utiliser la méthode de variation de la constante. Pour simplifier les calculs des solutions x_1 et x_4, on peut poser $z(t) = x_1(t) + \mathrm{i}x_4(t)$.

Partie II

II.2 Introduire un autre système fondamental de solutions $(\widetilde{\mathrm{X}_1}, \ldots, \widetilde{\mathrm{X}_n})$ et la matrice de passage de la base $(\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n)$ à $(\widetilde{\mathrm{X}_1}, \ldots, \widetilde{\mathrm{X}_n})$.

II.3.1 Utiliser la définition de $\mathrm{R}(t, t_0)$.

II.3.2 Pour tout $(t, t_0) \in \mathrm{I}^2$, poser $t_2 = t_0$ et $t_1 = t$.

II.4.3 Remarquer que pour tout $(t, t_0) \in \mathrm{I}^2$, $\mathrm{Y}(t) = \mathrm{R}(t, t_0) \displaystyle\int_0^t \mathrm{R}(t_0, u)\mathrm{B}(u)\, \mathrm{d}u$ et utiliser les résultats des questions II.3.1 et II.3.2.

Partie III

III.1.1 On procède par analyse et synthèse. Penser au fait que si un polynôme est nul, tous ses coefficients sont nuls.

III.1.3.1 Tenir compte du fait que si une série entière s'annule sur tout son domaine de convergence, alors chacun de ses coefficients est nul. Pour le rayon de convergence, distinguer les cas $a_4 = 0$ et $a_4 \neq 0$ et penser au critère de convergence de d'Alembert.

III.1.3.2 Déterminer un rang k_0 à partir duquel on peut exprimer a_{k+1} en fonction de a_k. Procéder ensuite par récurrence pour exprimer a_{k+1} en fonction de k et a_4. Noter que pour déterminer une solution développable en série entière, il faut et il suffit de connaître ses coefficients a_0 et a_4.

III.2.2 On peut se rappeler l'égalité :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

lorsque cette matrice est inversible.

III.3.3 Commencer par utiliser la question II.4.3 pour trouver une solution à l'équation matricielle associée à (e), puis en déduire une solution de (e). En ce qui concerne la solution générale de (e) sur $[\,0\,;1\,[$, on peut la déduire de celle sur $]\,0\,;1\,[$.

I. Cas d'une matrice à coefficients constants

I.1 Fixons un vecteur $\mathrm{V} \in \mathbb{R}^n$ non nul ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$ et posons $\mathrm{X}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{V}$ pour tout réel t. Notons que le vecteur colonne X est dérivable et supposons qu'il est une solution de (E_0). Soit $t \in \mathbb{R}$. On a alors

$$\mathrm{X}'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{V}$$

Par linéarité de A $$\mathrm{AX}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{AV}$$

Par conséquent $$\mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{AV} = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{V}$$

On obtient alors, en divisant par $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$,

$$\mathrm{AV} = \lambda \mathrm{V}$$

Comme V est non nul c'est bien un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

Réciproquement, si V est un vecteur propre de A associé à λ, alors $\mathrm{AV} = \lambda\mathrm{V}$. En outre, si $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{X}'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{V}$$

De plus $$\mathrm{AX}(t) = \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{AV}$$

et puisque V est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ

$$\mathrm{AX}(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda t}\mathrm{V}$$

Par conséquent $$\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$$

c'est-à-dire que X vérifie (E_0). Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{X est solution de } (\mathrm{E}_0) \text{ si et seulement si}\\ \text{V est un vecteur propre de A associé à } \lambda.\end{array}}$$

I.2.1 Pour calculer les valeurs propres de la matrice A, calculons son polynôme caractéristique. On sait en effet que ses racines sont les valeurs propres de A. Développons alors deux fois par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_4) &= \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2-\mathrm{X} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\mathrm{X} & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -\mathrm{X} \end{vmatrix} \\
&= (2-\mathrm{X}) \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 1 & -1 \\ 0 & 1-\mathrm{X} & 0 \\ 1 & 1 & -\mathrm{X} \end{vmatrix} = (2-\mathrm{X})(1-\mathrm{X}) \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & -1 \\ 1 & -\mathrm{X} \end{vmatrix} \\
\det(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_4) &= (2-\mathrm{X})(1-\mathrm{X})(\mathrm{X}^2+1)
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{A} - \mathrm{XI}_4) &= (\mathrm{X}^2+1)(2-\mathrm{X})(1-\mathrm{X}) \\
&= (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+\mathrm{i})(\mathrm{X}-\mathrm{i})(\mathrm{X}-2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de A sont donc } 1,\ 2,\ -\mathrm{i} \text{ et } \mathrm{i}.}$$

Déterminons maintenant les sous-espaces propres associés. On note E_λ le sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ. Soit $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$. Commençons par déterminer E_1. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{E}_1 &\iff \mathrm{A}x = x \\
&\iff \left\{\begin{aligned} -x_2 + x_3 - x_4 &= x_1 \\ 2x_2 &= x_2 \\ x_2 + x_3 &= x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= x_4 \end{aligned}\right. \\
&\iff \left\{\begin{aligned} x_3 - x_4 &= x_1 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= x_4 \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

$$x \in \mathrm{E}_1 \iff \left\{\begin{aligned} -x_1 - x_4 &= x_1 - x_4 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= x_4 \end{aligned}\right. \qquad \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3$$

Par suite
$$x \in \mathrm{E}_1 \iff \left\{\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= x_4 \end{aligned}\right.$$

puis
$$x \in \mathrm{E}_1 \iff x = x_3\,{}^t(0,0,1,1)$$

On en déduit que
$$\boxed{\mathrm{E}_1 = \mathrm{Vect}\ \{{}^t(0,0,1,1)\}}$$

Déterminons ensuite E_2. De la même manière,

$$\begin{aligned}
x \in \mathrm{E}_2 &\iff \mathrm{A}x = 2x \\
&\iff \left\{\begin{aligned} -x_2 + x_3 - x_4 &= 2x_1 \\ 2x_2 &= 2x_2 \\ x_2 + x_3 &= 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2x_4 \end{aligned}\right. \\
&\iff \left\{\begin{aligned} -x_2 + x_3 - x_4 &= 2x_1 \\ x_2 &= x_3 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 2x_4 \end{aligned}\right. \\
&\iff \left\{\begin{aligned} x_4 &= -2x_1 \\ x_2 &= x_3 \\ x_1 &= 2x_4 \end{aligned}\right.
\end{aligned}$$

$$x \in \mathrm{E}_2 \iff \left\{\begin{aligned} x_4 &= 0 \\ x_2 &= x_3 \\ x_1 &= 0 \end{aligned}\right.$$

puis
$$x \in \mathrm{E}_2 \iff x = x_2\,{}^t(0,1,1,0)$$

Cette fois, on déduit que
$$\boxed{\mathrm{E}_2 = \mathrm{Vect}\ \{{}^t(0,1,1,0)\}}$$