X Physique B PC 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Rémy Hervé (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Clélia De Mulatier (ENS Cachan) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet en trois parties aborde la réponse diélectrique des matériaux au passage d'une onde électromagnétique dans les domaines linéaire et non linéaire, ainsi que les applications associées.

- La première partie est consacrée à la réponse linéaire. Elle s'appuie sur la réponse mécanique du nuage électronique au passage d'une onde électromagnétique harmonique, en faisant appel à la construction du vecteur polarisation à partir du moment dipolaire induit. Restant relativement proche des grandes notions vues en cours sur les milieux, la difficulté de cette partie repose essentiellement sur sa concision. En particulier, dès la première question, il est demandé de reconstruire le modèle de la réponse élastique du nuage électronique à un champ électrique, sans autre hypothèse qu'une description sommaire de la forme de la distribution de charge.
- La partie centrale constitue véritablement le cœur du sujet. Elle s'appuie sur le modèle de la première partie pour y introduire une non linéarité de deuxième ordre et met en place les outils et la démarche à réutiliser dans la dernière partie. Parfois un peu technique dans les calculs, l'énoncé choisit toutefois de faire l'impasse sur les plus grosses difficultés pour se concentrer sur l'interprétation physique des résultats. C'est donc avant tout d'une bonne compréhension de la dynamique de l'interaction matière-rayonnement qu'il faut faire preuve. À noter que la dernière sous-partie aborde l'intéressante question de la production d'un faisceau de fréquence double dans certains cristaux non linéaires.
- La dernière partie s'intéresse à la première non linéarité observable dans les cristaux centro-symétriques. Elle est très semblable à la précédente, en moins détaillé ; l'application à l'étude de l'autofocalisation requiert une bonne compréhension des phénomènes de diffraction et de réflexion totale.

Relativement court, ce sujet exige de ne pas se laisser perturber par des calculs souvent lourds, à défaut d'être vraiment compliqués, pour ne pas perdre de vue la physique mise en jeu. C'est d'ailleurs une des raisons de sa difficulté. Les calculs restent rares et ne sont pas mis en avant ; en revanche, la maîtrise des concepts physiques et la capacité à utiliser des raisonnements abordés dans d'autres situations sont très développés. Seuls ceux qui ont du recul sur le programme peuvent espérer tirer leur épingle du jeu sur une telle épreuve. Il faut également noter que la connaissance des propriétés énergétiques des ondes électromagnétiques est indispensable pour répondre à de nombreuses questions.

Indications

Partie I

1.a Commencer par déterminer l'action du nuage électronique sur le noyau.

1.d La force obtenue est une force de rappel élastique (identique à celle d'un ressort).

2.a Il faut une hypothèse « non relativiste » et une hypothèse permettant de supposer que le champ incident est uniforme à l'échelle de l'atome.

2.b À l'aide des hypothèses précédentes, il faut réduire l'action du champ électromagnétique à la seule force du champ électrique au centre de l'atome.

3.d Dans un milieu condensé (liquide, solide), $\mathrm{N} \simeq a^{-3}$.

Partie II

5 La puissance surfacique transportée par une onde plane harmonique monochromatique est de l'ordre de $\varepsilon_0\, c\, \mathrm{E_0}^2$.

8.b Pour être vraie à tout instant, l'équation de l'ordre un en α conduit à deux nouvelles équations.

8.c Il faut exploiter l'asymétrie du potentiel.

8.f Faire une analyse dimensionnelle.

10 Montrer que ${\mathrm{E}_1}^2 + {\mathrm{E}_2}^2$ est constant.

11 Utiliser la grandeur conservée précédente pour obtenir une équation différentielle non linéaire sur E_2.

12 Faire apparaître la forme intégrale donnée en introduction.

Partie III

18 Raisonner en $x = 0$. Exprimer β d'abord en fonction de a_1 et b_1.

21 On peut considérer que l'indice d'un milieu condensé est au moins de 1,1.

22 La diffraction d'une onde plane par une fente de largeur d conduit à un faisceau conique d'ouverture

$$\theta = \frac{\lambda}{n\, d}$$

Étude de quelques phénomènes non linéaires dans les milieux diélectriques

I. Un modèle de susceptibilité électronique en réponse linéaire

1.a Soit O le barycentre du noyau et G celui du nuage électronique. Plutôt que la force exercée par le noyau sur le nuage électronique, cherchons dans un premier temps la force $-\overrightarrow{\mathrm{F}}$ exercée par le nuage électronique sur le noyau. Le nuage électronique étant supposé être une boule de rayon a uniformément chargée de charge totale $-e$, sa charge volumique est

$$\rho = -\frac{3\,e}{4\,\pi\,a^3}$$

Cette distribution est à géométrie sphérique. Le champ $\overrightarrow{\mathrm{E_e}}$ créé par le nuage électronique est donc radial et ne dépend que de r, la distance à G :

$$\overrightarrow{\mathrm{E_e}}(\mathrm{M}) = \mathrm{E}(r)\,\overrightarrow{e_r} = \mathrm{E}(\mathrm{GM})\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{GM}}}{\mathrm{GM}}$$

Soit une surface de Gauss sphérique de rayon $r < a$ et concentrique avec le nuage. Le flux du champ électrique au travers de cette surface est

$$\Phi[\overrightarrow{\mathrm{E_e}}] = 4\pi\,r^2\,\mathrm{E_e}(r)$$

Tandis que la charge enfermée par la surface de Gauss est

$$\mathrm{Q_{int}} = \frac{4}{3}\,\pi\,r^3\,\rho$$

Par conséquent, d'après le théorème de Gauss, le nuage électronique crée, en un point M voisin de G, le champ

$$\overrightarrow{\mathrm{E_e}}(\mathrm{M}) = \frac{\rho}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{GM}} = -\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3}\,\overrightarrow{\mathrm{GM}}$$

Le nuage électronique portant la charge $-e$, le noyau doit porter la charge $+e$ pour que l'atome soit neutre. Il en résulte l'action du nuage électronique sur le noyau

$$-\overrightarrow{\mathrm{F}} = e\,\overrightarrow{\mathrm{E_e}}(\overrightarrow{\mathrm{GO}}) = e\,\overrightarrow{\mathrm{E_e}}(-\overrightarrow{r}) \qquad \text{avec } \overrightarrow{r} = \overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

et donc

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}} = -\frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3}\,\overrightarrow{r}}$$

> Si on veut déterminer directement la force exercée par le noyau sur le nuage électronique, il faut écrire l'intégrale des forces élémentaires exercées sur chaque point du nuage. On obtient alors une intégrale complexe impossible à intégrer sans faire appel au théorème de Green-Ostrogradsky, ce qui revient à déterminer le champ électrique créé par le nuage électronique.

1.b En comparant l'expression proposée à celle obtenue, il vient

$$\boxed{{\omega_0}^2 = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,a^3\,m_\mathrm{e}}}$$

On peut prendre a de l'ordre de la taille d'un atome, soit un angström :

$$\boxed{\omega_0 \sim 10^{16}\ \mathrm{rad.s^{-1}}}$$

1.c $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ est une force de rappel élastique de constante de raideur $m_{\mathrm{e}}\,{\omega_0}^2$. Elle dérive donc du potentiel

$$\boxed{\mathrm{W}_2(r) = \frac{1}{2}\,m_{\mathrm{e}}\,{\omega_0}^2\,r^2}$$

> On peut noter que ce résultat est donné en introduction de la partie II.

1.d La force d'interaction étant une force de rappel élastique, ω_0 est la **pulsation d'oscillation libre** du dipôle : si le barycentre du nuage électronique est initialement écarté de celui du noyau et qu'on laisse ensuite le système évoluer librement, le point G oscille autour de O à la pulsation ω_0.

2.a On suppose que la vitesse de déplacement de l'électron est faible devant la vitesse de la lumière (mouvement non relativiste). On suppose également que la longueur d'onde de l'onde incidente est grande devant la taille de l'atome, donc grande devant a.

> Cette seconde hypothèse, très pratique puisqu'elle permet de considérer que le nuage électronique voit un champ incident uniforme, revient à supposer l'absence de comportement corpusculaire de la lumière. C'est une hypothèse « non quantique ».

2.b Comme la longueur d'onde de l'onde électromagnétique est grande devant la taille de l'atome, soit a, l'électron perçoit un champ extérieur uniforme égal à celui au centre de l'atome (soit en O). Par conséquent, le nuage subit la force de Lorentz

$$\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{EM}} = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{O},t) - e\,\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{\mathrm{B}}(\mathrm{O},t)$$

où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse de l'électron. Toutefois, sachant que dans une onde électromagnétique le champ magnétique a une amplitude de l'ordre de E_0/c, le second terme est de l'ordre de

$$e\,\frac{v}{c}\,\mathrm{E}_0 \ll e\,\mathrm{E}_0 \qquad \text{car, par hypothèse, } v \ll c.$$

On peut ainsi négliger le second terme et écrire (en prenant $x_{\mathrm{O}} = 0$) :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F}}_{\mathrm{EM}} = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{O},t) = -e\,\mathrm{E}_0\,\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_y}}$$

3.a L'équation (**2**) conduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\,\overrightarrow{r} = -\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}$$

Recherchons une solution harmonique en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω, soit une solution vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{r}}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2\,\overrightarrow{r}$$

Il vient immédiatement

$$\boxed{\overrightarrow{r} = -\frac{1}{{\omega_0}^2-\omega^2}\,\frac{e}{m_{\mathrm{e}}}\,\overrightarrow{\mathrm{E}}}$$