Centrale Maths 2 PC 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Weiss (Professeur agrégé) ; il a été relu par Julien Reygner (École Polytechnique) et Guillaume Batog (Professeur agrégé).

Le thème principal du sujet est l'étude de situations mathématiques très variées au cours desquelles on rencontre des équations linéaires et des espaces affines. Il est bien sûr question d'algèbre linéaire, mais également d'équations différentielles, de suites récurrentes, de géométrie sphérique et d'équations fonctionnelles.

Le sujet comporte quatre parties très indépendantes qui abordent des pans différents du programme.

- La première partie propose l'application de plusieurs algorithmes de pivot et des interprétations géométriques et algébriques de ces algorithmes. D'aucuns trouveront ludique l'aspect « jeux mathématiques » de certaines questions.
- La deuxième partie s'engage dans la comparaison d'un système différentiel et d'un système d'équations de récurrence dont les coefficients sont communs. C'est l'occasion de réfléchir à la nature des objets mathématiques en question. Une méthode de découplage de ces systèmes est utilisée.
- La troisième partie est plutôt atypique, en ce sens qu'elle impose un détour par des raisonnements géométriques purs et durs qui seront l'occasion d'une cure de jouvence enrichissante. La méthode de résolution proposée est élégante.
- La quatrième partie traite d'équations fonctionnelles linéaires et propose deux techniques de construction d'une solution particulière : sous la forme d'une série de fonctions et sous la forme d'une fonction définie par une intégrale.

Indications

Partie I

I.A Interpréter graphiquement le passage d'une sous-figure à une autre ainsi que le résultat de l'étape finale.

I.C.2 Une opération élémentaire préserve le caractère libre ou générateur d'une famille de vecteurs.

Partie II

II.B Ne pas oublier qu'on peut toujours adjoindre des identités à un système d'équations (comme $x' = x'$ par exemple) sans changer l'ensemble de ses solutions.

II.C.2 Utiliser le fait que l'ensemble des solutions de l'équation $\mathrm{X}' = \mathrm{AX}$ est un espace vectoriel de dimension 4.

Partie III

III.A.1 Commencer par s'assurer au brouillon qu'on sait encore traiter le cas de deux cercles du plan (demander éventuellement sans rougir aux petites sœurs et petits frères).

III.A.2 Se ramener à une situation plane en « perçant » la sphère en un point par lequel ne passe aucun des cercles.

III.A.3 C'est le cœur de cette partie. Dessiner une zone de la sphère et réfléchir à ce que peut donner le tracé d'un nouveau cercle : l'indication du sujet permet alors de majorer u_{n+1}. On pourra ensuite montrer que ce majorant est atteint.

III.B.1 Appliquer la question préliminaire à l'application Φ.

III.B.3 Déterminer l'image par Φ d'une base bien choisie.

Partie IV

IV.B.2-3 Utiliser le caractère bijectif sur leur domaine des fonctions lb et ln et de leurs réciproques.

IV.C.3 Calculer $\mathrm{U}_n(x+1) - \mathrm{U}_n(x)$.

IV.C.4 Pour un entier $k \geqslant 1$, comparer $u_k(x)$ à la fonction $t \mapsto -1/(t+x)^2$.

IV.D.1 Prolonger par continuité en 0.

IV.D.2 Utiliser le théorème de convergence dominée avec la caractérisation séquentielle de la limite.

IV.D.3 Effectuer le calcul en se restreignant d'abord à un segment.

Question préliminaire Lorsque le vecteur b n'appartient pas à l'image de f, l'ensemble $\mathcal{S}$ est vide. Si par contre $b \in \text{Im } f$, l'ensemble $\mathcal{S}$ possède au moins un élément x_0. Si x_1 est une solution de l'équation $f(x) = b$, alors $(x_1 - x_0) \in \text{Ker } f$ puisque, par linéarité de f,

$$f(x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0) = b - b = 0$$

À l'inverse, si $x \in \text{Ker } f$, alors $(x + x_0) \in \mathcal{S}$ car pour les mêmes raisons

$$f(x + x_0) = f(x) + f(x_0) = 0 + b = b$$

Si le vecteur b n'appartient pas à l'image de f, l'ensemble $\mathcal{S}$ est vide. Sinon, l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $f(x) = b$ possède une structure de sous-espace affine dirigé par le noyau de f et passant par toute solution particulière.

I. Pivots

I.A Résolution d'un système linéaire : interprétation graphique

I.A Procédons par identification :

- L'ordre indiqué sur le schéma donné par le sujet permet d'identifier les lignes L_i et L_j concernées.
- Chaque opération élémentaire doit aboutir à l'annulation d'un coefficient précis dans le nouveau système d'équations. On obtient ainsi une équation de la forme

$$0 = \alpha r + \beta s$$

  où α et β sont les coefficients à déterminer de l'opération élémentaire, et r (resp. s) le coefficient en ligne i (resp. en ligne j) et colonne j dans l'ancien système. Un tel couple (α, β) est défini à un coefficient multiplicatif près. On le choisit de manière à obtenir des coefficients diagonaux égaux à 1 à la fin de l'algorithme.

État initial
$$\left\{\begin{aligned} 1x + 1y + 1z &= 2 \\ 1x + 2y + 4z &= 4 \\ 1x + 3y + 9z &= 8 \end{aligned}\right.$$

$\text{L}_2 \leftarrow \text{L}_2 - \text{L}_1$
$$\left\{\begin{aligned} 1x + 1y + 1z &= 2 \\ 0x + 1y + 3z &= 2 \\ 1x + 3y + 9z &= 8 \end{aligned}\right.$$

$\text{L}_3 \leftarrow \text{L}_3 - \text{L}_1$
$$\left\{\begin{aligned} 1x + 1y + 1z &= 2 \\ 0x + 1y + 3z &= 2 \\ 0x + 2y + 8z &= 6 \end{aligned}\right.$$

$\text{L}_1 \leftarrow \text{L}_1 - \text{L}_2$
$$\left\{\begin{aligned} 1x + 0y - 2z &= 0 \\ 0x + 1y + 3z &= 2 \\ 0x + 2y + 8z &= 6 \end{aligned}\right.$$

$\mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - 2\mathrm{L}_2$
$$\left\{\begin{array}{l} 1x + 0y - 2z = 0 \\ 0x + 1y + 3z = 2 \\ 0x + 0y + 2z = 2 \end{array}\right.$$

$\mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_3$
$$\left\{\begin{array}{l} 1x + 0y + 0z = 2 \\ 0x + 1y + 3z = 2 \\ 0x + 0y + 2z = 2 \end{array}\right.$$

$\mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 3\mathrm{L}_3/2$
$$\left\{\begin{array}{l} 1x + 0y + 0z = 2 \\ 0x + 1y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + 2z = 2 \end{array}\right.$$

Le système linéaire
$$\left\{\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x + 2y + 4z = 4 \\ x + 3y + 9z = 8 \end{array}\right.$$
admet pour unique solution le triplet $(x, y, z) = (2, -1, 1)$.

> Si chaque équation de chaque système est interprétée comme une équation d'un plan affine de l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, alors cette équation est définie à multiplication près par un réel non nul. Le choix des $(\alpha_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ n'a donc aucune influence sur la géométrie du problème.

Le système d'équations de départ possède une solution unique, et à la fin des opérations sur les lignes on a obtenu un système d'équations de la forme
$$\left\{\begin{array}{l} x + 0y + 0z = a \\ 0x + y + 0z = b \\ 0x + 0y + z = c \end{array}\right.$$
où a, b et c désignent des réels. Si l'une des sous-figures de la figure 1 correspond à cet état final, elle doit présenter trois plans deux à deux orthogonaux et parallèles aux plans vectoriels engendrés par les paires de vecteurs de la base canonique. C'est le cas de la sous-figure `d`, qui est donc la dernière.

Chaque opération élémentaire modifie une seule équation d'un système d'équations, et par suite une seule équation de plan affine de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique. On peut donc retrouver de proche en proche l'ordre des sous-figures de la figure 1 en cherchant les paires de sous-figures partageant deux plans communs, à savoir (`d`, `a`), (`a`, `g`), (`g`, `f`), (`f`, `b`), (`b`, `e`) et (`e`, `c`).

Numéro d'étape	0	1	2	3	4	5	6
Numéro de sous-figure	`c`	`e`	`b`	`f`	`g`	`a`	`d`

> On peut aussi essayer de lire graphiquement une équation de chacun des plans des sous-figures de la figure 1 et comparer ensuite ces équations aux équations rencontrées lors de la résolution algébrique, mais cela est plus long et plus malaisé.