X Physique MP 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jimmy Roussel (Professeur en CPGE) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur la caractérisation de deux phénomènes gravitationnels relativistes, l'effet géodétique et l'effet Lense-Thirring. Elle en propose une approche par analogie avec l'électromagnétisme. Le problème est organisé en quatre parties plus ou moins liées.

- La première partie établit cette analogie entre la gravitation et l'électromagnétisme et introduit, en complément du champ gravitationnel $\overrightarrow{g}$, les champ $\overrightarrow{h}$ et moment $\overrightarrow{\mathrm{M}_\mathrm{g}}$ gravitomagnétiques.
- Dans la deuxième, on montre d'abord les caractéristiques de la trajectoire circulaire d'un satellite de faible altitude. En assimilant cette orbite à une spire selon les termes de l'analogie, on évalue le champ gravitomagnétique ressenti par le satellite et la rotation d'un gyroscope embarqué. C'est l'effet géodétique.
- Selon une progression similaire, la troisième partie s'intéresse à la rotation de la Terre sur elle-même. Là encore, on détermine le champ gravitomagnétique associé et la rotation d'un gyroscope embarqué, cette dernière étant appelée effet Lense-Thirring.
- Enfin, dans la quatrième partie, on montre comment le champ magnétique induit dans un supraconducteur par la rotation du gyroscope permet la mesure des effets précédents.

L'épreuve fait appel à la mécanique du point et du solide (moment d'inertie, théorème du moment cinétique, expressions du champ de gravitation et étude de la trajectoire circulaire) et surtout à l'électromagnétisme des première et seconde années (considérations d'invariance et de symétrie, utilisation des théorèmes de Gauss et d'Ampère, manipulation des équations de Maxwell et de l'équation de conservation de la charge, champ magnétique créé par une spire circulaire, expressions du champ magnétique créé et du couple subi par un moment magnétique). Réussir une telle épreuve demande alors une triple compétence : une connaissance sans faille de ces nombreux aspects du cours, le recul et l'analyse nécessaires à leur utilisation dans une situation originale, et enfin une autonomie certaine, puisqu'on ne trouve aucun schéma dans l'énoncé et que de nombreuses questions laissent le candidat libre de paramétrer ses calculs comme il l'entend. Enfin, signalons que, comme les années précédentes, la calculatrice n'était pas autorisée pour cette épreuve. Les applications numériques sont dans ce cas souvent valorisées dans les barèmes.

Indications

Première partie

I.3 Utiliser l'équation de Maxwell-Faraday gravitationnelle.

I.4 Utiliser l'équation de Maxwell-Ampère et $\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{F}}) = 0$ pour tout champ $\overrightarrow{\mathrm{F}}$.

I.5 Dans le vide, $\rho = 0$ et $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{0}$.

I.7 Le champ $\overrightarrow{g}$ appartient aux plans de symétrie de la distribution de masse. Appliquer le théorème de Gauss à un cylindre de rayon r et de hauteur ℓ.

I.9 Le champ $\overrightarrow{h}$ est orthogonal aux plans de symétrie de la distribution de masse. Appliquer, après justifications, le théorème d'Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \overrightarrow{h} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = -\frac{4\pi \mathrm{G}\,\mathrm{I}_{\text{enlacé}}}{c^2}$$

à un cercle de rayon r où l'intensité due au mouvement du fil est $\mathrm{I} = \lambda v$.

I.12 L'intensité due à la rotation de la spire de période T est $\mathrm{I} = m/\mathrm{T}$.

I.13 Appliquer le théorème du moment cinétique. L'équation

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{\sigma}$$

caractérise la rotation de $\overrightarrow{\sigma}$ avec le vecteur rotation $\overrightarrow{\omega}$.

Deuxième partie

II.1 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au satellite et identifier l'accélération centripète v^2/r.

II.3 L'intensité due au mouvement de la Terre sur son orbite est $\mathrm{I} = \mathrm{M}_\oplus/\mathrm{T}$.

Troisième partie

III.2 Le champ $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ créé par un dipôle magnétique en O de moment $\overrightarrow{\mathrm{M}} = \mathrm{M}\,\overrightarrow{e_z}$ est

$$\overrightarrow{\mathrm{B}} = \frac{\mu_0 \mathrm{M}}{4\pi r^3}\left(2\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

III.3 Projeter simplement $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ selon $\overrightarrow{e_y}$ et $\overrightarrow{e_z}$.

III.4 Appliquer le théorème du moment cinétique. Évaluer

$$\overrightarrow{\delta\sigma} = \int_{t=0}^{\mathrm{T}} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}}{\mathrm{d}t} \times \mathrm{d}t = \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{T}}{2\pi}\,\mathrm{d}\theta$$

III.5 Représenter dans la base cartésienne $\overrightarrow{\sigma}$ et $\overrightarrow{\delta\sigma}$ et calculer $\tan\varepsilon = \dfrac{\|\overrightarrow{\delta\sigma}\|}{\|\overrightarrow{\sigma}\|}$.

Quatrième partie

IV.6 Calculer $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{r}$ en coordonnées cartésiennes.

IV.7 Vérifier que les champs $\overrightarrow{\mathrm{E}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ dans la coquille supraconductrice sont solutions des équations de Maxwell dans la boule de quartz.

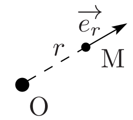
IV.8 Le champ magnétique $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ reste aligné sur le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}$ du gyroscope. Reprendre la paramétrisation de la question III.5. En notant τ la durée d'une année, justifier la variation de la composante selon $\overrightarrow{e_x}$

$$\Delta \mathrm{B}_x \simeq -\omega_2 \tau \mathrm{B}$$

Effet du champ gravitationnel terrestre sur le mouvement d'un gyroscope en orbite

I. Une théorie du gravitomagnétisme

I.1 On se place dans le repère sphérique $(\mathrm{O}, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$. Le champ électrique créé en M par une charge ponctuelle q en O est



$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}}(\mathrm{M}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

Le champ gravitationnel créé en M par une masse ponctuelle m en O est

$$\boxed{\overrightarrow{g}(\mathrm{M}) = -\frac{\mathrm{G}m}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

I.2 Les expressions précédentes justifient l'analogie formelle

$$\begin{array}{ccc}
\text{champ électrique } \overrightarrow{\mathrm{E}} & \longleftrightarrow & \text{champ gravitationnel } \overrightarrow{g} \\
\text{charge } q & \longleftrightarrow & \text{masse } m \\
\text{charge volumique } \rho_{\mathrm{e}} & \longleftrightarrow & \text{masse volumique } \rho \\
\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} & \longleftrightarrow & -\mathrm{G}
\end{array}$$

L'équation de Maxwell-Gauss $\qquad \mathrm{div}\,\overrightarrow{\mathrm{E}} = \dfrac{\rho_{\mathrm{e}}}{\varepsilon_0}$

possède donc l'équivalent gravitationnel

$$\boxed{\mathrm{div}\,\overrightarrow{g} = \frac{\rho}{\varepsilon_{\mathrm{g}}} \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon_{\mathrm{g}} = -\frac{1}{4\pi\mathrm{G}}}$$

Selon la même analogie, le théorème de Gauss pour une surface fermée $\mathcal{S}$ orientée dans le sens sortant

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{\mathrm{E}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}_{\,\mathrm{sort}} = \frac{\mathrm{Q}_{\,\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}$$

où $\mathrm{Q}_{\mathrm{int}}$ est la charge à l'intérieur de $\mathcal{S}$ devient

$$\boxed{\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{g}\cdot\overrightarrow{\mathrm{dS}}_{\,\mathrm{sort}} = -4\pi\mathrm{G}\,\mathrm{M}_{\mathrm{int}}}$$

avec $\mathrm{M}_{\mathrm{int}}$, la masse à l'intérieur de $\mathcal{S}$.

I.3 Notons L et T, les dimensions d'une longueur et d'une durée. Le champ de gravitation $\overrightarrow{g}$, comme le champ de pesanteur, a la dimension d'une accélération :

$$\left[\overrightarrow{g}\right] = \mathrm{L.T^{-2}}$$

Le rotationnel correspond à une dérivation spatiale du premier ordre donc

$$\left[\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{g}\right] = \left[\overrightarrow{g}\right].\mathrm{L^{-1}} = \mathrm{T^{-2}}$$

L'équation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{g} = -\frac{\partial\,\overrightarrow{h}}{\partial t}$$

impose alors pour le champ gravitomagnétique $\overrightarrow{h}$

$$\text{T}^{-2} = \big[\overrightarrow{h}\big].\text{T}^{-1}$$

donc $\boxed{\overrightarrow{h} \text{ possède la dimension de l'inverse d'une durée.}}$

I.4 Prenons la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère, intervertissons les dérivée temporelle et spatiales et utilisons l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\begin{aligned}
\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{h}\right) &= \mu_{\text{g}}\left[\text{div}\,\overrightarrow{\jmath} + \varepsilon_{\text{g}}\,\text{div}\left(\frac{\partial\,\overrightarrow{g}}{\partial t}\right)\right] \\
&= \mu_{\text{g}}\left[\text{div}\,\overrightarrow{\jmath} + \varepsilon_{\text{g}}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\text{div}\,\overrightarrow{g}\right)\right] \\
\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{h}\right) &= \mu_{\text{g}}\left[\text{div}\,\overrightarrow{\jmath} + \varepsilon_{\text{g}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_{\text{g}}}\right)\right]
\end{aligned}$$

Sachant que $\text{div}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{F}}\right) = 0$ pour tout champ $\overrightarrow{\text{F}}$, on en déduit l'équation de conservation de la charge

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \text{div}\,\overrightarrow{\jmath} = 0}$$

I.5 Partons cette fois-ci du rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, employons la formule rappelée en début d'énoncé et intervertissons la dérivée temporelle et les dérivées spatiales du rotationnel,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{g}\right) = -\,\overrightarrow{\text{rot}}\left(\frac{\partial\,\overrightarrow{h}}{\partial t}\right)$$

soit
$$\overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\overrightarrow{g}\right) - \Delta\overrightarrow{g} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{h}\right)$$

Dans le vide, $\rho = 0$ et $\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{0}$ donc les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère s'écrivent

$$\text{div}\,\overrightarrow{g} = 0 \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{h} = \mu_{\text{g}}\varepsilon_{\text{g}}\frac{\partial\,\overrightarrow{g}}{\partial t}$$

d'où
$$\overrightarrow{0} - \Delta\overrightarrow{g} = -\mu_{\text{g}}\varepsilon_{\text{g}}\frac{\partial^2\overrightarrow{g}}{\partial t^2}$$

Ainsi, le champ gravitationnel dans le vide est solution d'une équation de d'Alembert

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{g} - \frac{1}{{c_{\text{g}}}^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{g}}{\partial t^2} = \overrightarrow{0} \qquad \text{avec} \qquad c_{\text{g}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_{\text{g}}\varepsilon_{\text{g}}}}}$$

L'identification de la célérité c_{g} à la vitesse c de la lumière dans le vide conduit à

$$\mu_{\text{g}} = \frac{1}{\varepsilon_{\text{g}}c^2}$$

soit
$$\boxed{\mu_{\text{g}} = -\frac{4\pi\text{G}}{c^2}}$$