X Maths B MP 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jules Svartz (ENS Cachan) ; il a été relu par Yvon Vignaud (Professeur en CPGE) et Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université).

Toute série entière converge absolument à l'intérieur de son disque ouvert de convergence. Sur le bord peut apparaître chacune des situations de convergence absolue, de convergence simple ou de divergence. Le problème porte essentiellement sur des outils pour étudier la divergence de séries entières en des points de ce bord.

- La première partie introduit la convergence au sens de Césaro, appelée C-convergence, d'une suite ou d'une série, qui est plus générale que la convergence usuelle. Une série entière $\sum c_n z^n$ est C-convergente en z_0 et de C-limite ℓ si la suite des moyennes des n premières sommes partielles en z_0 converge vers ℓ. Le sujet pose des questions classiques sur les suites et les séries entières. La dernière question demande une certaine technicité calculatoire pour déterminer le domaine de C-convergence sur trois exemples.
- La seconde partie, indépendante de la première, propose d'établir le théorème de Kronecker qui généralise à n complexes le résultat classique suivant : si $z \in \mathbb{C}$ est de module 1 sans être une racine de l'unité, alors l'ensemble $\{z^k \mid k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. On y trouve de nombreuses manipulations de sommes et d'exponentielles complexes. C'est la partie la plus longue et la plus technique du problème alors qu'elle porte essentiellement sur les suites numériques.
- La troisième partie reprend les trois exemples de la première partie. À l'aide du théorème de Kronecker, on détermine l'ensemble des valeurs d'adhérence des sommes partielles d'une série entière en un point de C-convergence se trouvant sur le bord du disque de convergence. Cette partie demande une grande part d'autonomie pour répondre aux questions.

Indications

Partie I

1 La suite $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a en fait la même limite que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Choisir $\varepsilon > 0$ et couper la somme m_n en deux parties.

2 Exprimer a_n en fonction de m_n et de m_{n-1}.

3 L'expression $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ est une somme alternée dans le sens où les termes sont alternativement positifs et négatifs. Utiliser en outre la croissance de $(|a_k|)_{k\in\mathbb{N}}$ pour majorer $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right|$.

4 Appliquer deux fois le résultat de la question 2. Que peut-on dire des rayons de convergence des séries $\sum \dfrac{c_n}{n} z^n$ et $\sum c_n z^n$?

Partie II

6.a Pour toute fonction f dans $\mathcal{E}$, introduire la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$, et se ramener par combinaisons linéaires au cas des fonctions $x \mapsto e^{i\lambda x}$.

6.b Pour montrer que les coefficients d'une combinaison linéaire $\mathrm{S} = \sum a_\lambda e_\lambda$ supposée nulle sont nuls, on pourra utiliser astucieusement la forme linéaire M, en remarquant que multiplier S par une fonction e_{λ_0} permet de translater les indices, puisque $e_\lambda e_{\lambda_0} = e_{\lambda+\lambda_0}$.

7.b Partir de $\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}} e^{i(\frac{\mathrm{N}}{2}-k)t}$ et remarquer que $1 - e^{-ia} = e^{-\frac{ia}{2}}(e^{\frac{ia}{2}} - e^{-\frac{ia}{2}})$.

7.c Utiliser la question précédente en partant du terme de droite.

8.a Développer le produit !

8.b Dans le produit $f g_{\mathrm{N}}$, on ne s'intéresse en fait qu'aux produits de termes colinéaires à e_0.

9 Appliquer l'identité du parallélogramme à u_k et u_j.

10.a Utiliser le résultat de la question 8.c.

10.b Exploiter la question 9.

10.c Montrer tout d'abord que $\sin(\pi y_m) \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$ et utiliser ensuite la concavité de la fonction sin sur $[\,0\,;\pi/2\,]$ pour conclure.

11.b L'égalité $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathrm{N}'_m = \pm\infty$ est à comprendre comme

$$\lim_{m\to+\infty} \mathrm{N}'_m = +\infty \qquad \text{ou} \qquad \lim_{m\to+\infty} \mathrm{N}'_m = -\infty.$$

On pourra d'abord montrer que la suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, et procéder à une extraction.

12 Utiliser les deux suites construites dans les questions 10.c et 11.b. On pourra encore une fois procéder à une extraction, et s'assurer que la suite $(\mathrm{N}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ ainsi construite est strictement croissante, ce qui est utile dans la partie III.

Partie III

13.a Appliquer le théorème de Kronecker à la famille $\{x, \pi\}$.

13.b Appliquer le théorème de Kronecker à la famille $\{x, \lambda, \pi\}$.

13.c Appliquer le théorème de Kronecker à la famille $\{x, \lambda + x, \pi\}$.

I. Convergence au sens de Césaro

> Dans tout le corrigé, on désigne par $\mathbb{U}$ l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ des complexes de module 1.

1 Supposons $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente de limite $\ell \in \mathbb{C}$. Montrons que $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers ℓ. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$. L'inégalité triangulaire donne

$$|m_n - \ell| \leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} |a_j - \ell|$$

Puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ,

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_1 \qquad |a_n - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Par conséquent, pour tout $n \geqslant n_1$

$$\begin{aligned}
|m_n - \ell| &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n_1-1} |a_j - \ell| + \frac{1}{n+1}\sum_{j=n_1}^{n} |a_j - \ell| \\
&\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n_1-1} |a_j - \ell| + \frac{1}{n+1}\,\frac{(n-n_1+1)\varepsilon}{2} \\
|m_n - \ell| &\leqslant \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n_1-1} |a_j - \ell| + \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

De plus, lorsque n tend vers $+\infty$, la quantité $\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{j=0}^{n_1-1} |a_j - \ell|$ décroît vers 0 puisque la somme est constante par rapport à n et que $1/(n+1)$ tend vers 0 en décroissant. Par suite,

$$\exists n_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_2 \qquad \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n_1-1} |a_j - \ell| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Prenons $n_0 = \operatorname{Max}(n_1, n_2)$, on a donc montré

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \qquad |m_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit, $\boxed{\text{La suite } (m_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \ell.}$

> Cette démonstration est un classique à maîtriser.

Considérons maintenant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $a_n = (-1)^n$ pour tout n. Cette suite n'est pas convergente, mais

$$(n+1)\,m_n = a_0 + \cdots + a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi, $m_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

$$\boxed{\text{La suite } ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est C-convergente mais n'est pas convergente.}}$$

2 Remarquons que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$\frac{a_n}{n+1} = m_n - \frac{n}{n+1} m_{n-1}$$

et donc
$$\frac{a_n}{n} = \frac{n+1}{n}\left(m_n - \frac{n}{n+1} m_{n-1}\right)$$

Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est C-convergente vers ℓ, les deux suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(m_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ ont même limite ℓ. De plus, $\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ et $\dfrac{n+1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{n} = 0}$$

3 Remarquons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proposée a ses termes alternativement positifs et négatifs. De plus, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x \longmapsto x^\alpha \end{cases}$ est strictement croissante. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Si $n = 2p$ est pair, on a, d'une part,

$$\sum_{k=0}^{2p} a_k = \sum_{k=0}^{p-1} (a_{2k} + a_{2k+1}) + a_n = \sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{(f(2k) - f(2k+1))}_{\leqslant 0 \text{ car } f \text{ croissante}} + a_n$$

  donc $\sum\limits_{k=0}^{2p} a_k \leqslant a_n$. D'autre part,

$$\sum_{k=0}^{2p} a_k = a_0 + \sum_{k=0}^{p-1} (a_{2k+1} + a_{2k+2}) = \sum_{k=0}^{p-1} \underbrace{(-f(2k+1) + f(2k+2))}_{\geqslant 0 \text{ car } f \text{ croissante}} \geqslant 0$$

  Par conséquent, si n est pair, $\quad 0 \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant n^\alpha$

- Si $n = 2p+1$ est impair, écrivons $\sum\limits_{k=0}^{2p+1} a_k = \sum\limits_{k=0}^{2p} a_k + a_{2p+1}$. D'après le cas pair,

$$0 \leqslant \sum_{k=0}^{2p} a_k \leqslant (n-1)^\alpha$$

  donc
$$-n^\alpha = 0 + a_{2p+1} \leqslant \sum_{k=0}^{2p+1} a_k \leqslant (n-1)^\alpha - n^\alpha \leqslant 0$$

  Ainsi, si n est impair, $\qquad -n^\alpha \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \leqslant 0$

Par suite, pour toutes les valeurs de n, paires ou impaires,

$$|m_n| \leqslant \frac{n^\alpha}{n+1} \leqslant \frac{1}{n^{1-\alpha}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{car } \alpha \in \,]\,0\,;1\,[$$

$$\boxed{\text{La suite de terme général } a_n = (-1)^n n^\alpha \text{ est C-convergente de C-limite } 0.}$$