Mines Maths 1 MP 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Nicolas Martin (ENS Lyon) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Le problème traite d'algèbre, avec beaucoup de questions faciles et des difficultés calculatoires. Il est peu progressif et l'enchaînement entre les différentes parties est plutôt faible.

- La partie A porte sur les polynômes réciproques, notion qui a probablement été rencontrée en exercice en Sup. Elle porte d'ailleurs exclusivement sur le programme de première année et mis à part les deux dernières questions, elle est assez facile.
- La partie suivante est du même genre : en terme de connaissances, le cours de Sup suffit largement. Vous pouvez utiliser ces deux parties pour réviser les notions de l'année précédente.
- La partie C est quasiment une question de cours, vous la verrez en classe, souvent avec une méthode différente de celle de l'énoncé. Vous pouvez utiliser ces deux questions à la fin du chapitre sur la réduction des endomorphismes, ne serait-ce que pour vous convaincre qu'il faut absolument connaître ce grand classique pour les concours.
- La partie D commence par deux questions similaires, mais cette fois sur l'algèbre euclidienne. Il y a ensuite quelques questions avec des difficultés essentiellement calculatoires et, vers la fin, on utilise des résultats un peu plus profonds du cours de Spé. C'est à utiliser après l'étude de la réduction des endomorphismes symétriques.

Il y a bien à la fin un lien avec les deux premières parties, mais cela ne suffit pas à faire un beau problème déductif. Ce sujet est donc plutôt à utiliser comme illustration du cours pendant l'année que comme problème de révision.

Indications

Partie A

1 Poser $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ et ne pas oublier de montrer la linéarité.

2 P et $u_n(\mathrm{P})$ sont deux polynômes : ils sont égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux.

3 Penser à la condition sur les coefficients d'une équation du second degré pour que 1 ou -1 soit « racine évidente ». Pour le cas des polynômes réciproques de deuxième espèce, distinguer ceux de degré pair et ceux de degré impair.

4 Vérifier que si $\mathrm{P} = \mathrm{QR}$, alors $u_n(\mathrm{P}) = u_n(\mathrm{Q})\, u_n(\mathrm{R})$ puis étudier les différents cas possibles.

5 Remarquer que $\mathrm{X} - 1$ appartient à $\mathscr{D}$ puis appliquer la question précédente. Pour la réciproque, penser à factoriser à partir de la condition « 1 est racine ».

6 C'est la question précédente, *mutatis mutandis* (c'est-à-dire « en changeant ce qui doit être changé »).

7 Question difficile si on ne connaît pas le « truc » :

- pour l'existence, procéder par récurrence en calculant $\left(\mathrm{X} + \dfrac{1}{\mathrm{X}}\right)\left(\mathrm{X}^p + \dfrac{1}{\mathrm{X}^p}\right)$
- pour l'unicité, penser que deux polynômes qui sont égaux sur un sous-ensemble infini de $\mathbb{R}$ sont égaux.

8 Le début se déduit des questions précédentes. Faire ensuite un regroupement de termes symétriques en isolant le terme central et appliquer la question précédente.

Partie B

9 La condition sur les sommes implique que chaque élément est inférieur ou égal à j. Vérifier le caractère « bien défini » se restreint ici à vérifier que l'ensemble d'arrivée est le bon. Montrer la bijectivité en séparant injectivité et surjectivité.

10 Écrire $\mathrm{S}'_{i,j}$ comme réunion de deux ensembles disjoints (et connus). Utiliser la question précédente : s'il existe une bijection entre deux ensembles finis, ils ont même cardinal.

11 Procéder par récurrence sur $p = i + j$ et utiliser la propriété fondamentale des coefficients binomiaux (formule du triangle de Pascal).

Partie C

13 Le spectre est fini. Pour une matrice non inversible A, on peut donc trouver un entier N tel que $k \geqslant \mathrm{N}$ entraîne que $1/k$ n'est pas valeur propre de A. On peut alors appliquer la question précédente à la matrice $\mathrm{A} - \dfrac{1}{k}\,\mathrm{I}_n$ qui est inversible.

Partie D

14 Vérifier que la matrice S est symétrique réelle.

16 Utiliser le résultat classique « une famille de polynômes échelonnés en degrés est libre ». Pour le calcul de l'intégrale, procéder par intégrations par parties successives ou reconnaître la fonction Γ d'Euler. Remarquer enfin que S est la matrice d'un produit scalaire. Pour la matrice S', montrer que l'on peut passer de S' à S par des opérations élémentaires.

17 Montrer par récurrence que $f_i^{(j)}(t) = P_j(t)\,e^{-t}$ où P_j est un polynôme. Utiliser ensuite la formule de Leibniz de dérivation d'un produit de fonctions.

18 Procéder, encore une fois, par intégrations par parties pour calculer $\psi(L_i, B_j)$ et distinguer les cas où $i = j$ et $i < j$.

19 Pour déterminer la matrice T, développer $(X-1)^i$ par la formule du binôme de Newton. Pour déterminer U, commencer par chercher $\tau^{-1}(P)$. Utiliser ensuite la matrice d'un produit scalaire dans une base orthonormale et la formule de changement de base pour une forme bilinéaire symétrique.

20 Utiliser l'endomorphisme d de la matrice D dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer $(d \circ \tau^{-1})^2$.

21 Se servir des résultats des questions 13 et 19.

A. Équations algébriques réciproques

> Notons dès à présent que, pour que l'on puisse garder le caractère d'« indéterminée » de X, il faut se placer sur l'espace vectoriel des fractions rationnelles, dont les polynômes sont un sous-espace vectoriel, et, pour vérifier le caractère « bien défini » des applications proposées, prendre conscience qu'après passage sur cet espace des fractions rationnelles, on retombe bien sur l'espace des polynômes.

1 Posons $n \in \mathbb{N}$. Montrons dans un premier temps que l'application proposée est bien définie. Prenons $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. Alors $\mathrm{P}(1/\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k\, \mathrm{X}^{-k}$ est une fraction rationnelle correctement définie. Ainsi,

$$u_n(\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n\, \mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, \mathrm{X}^{n-k}$$

est bien un polynôme puisque $n-k \geqslant 0$ pour toutes les valeurs de k possibles. On en déduit que $u_n(\mathrm{P})$ est bien un polynôme qui de plus est de degré inférieur ou égal à n.

$$\boxed{\text{L'application } u_n \text{ est bien définie.}}$$

Montrons à présent que u_n est une symétrie, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une application linéaire qui vérifie $u_n \circ u_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$. Concernant la linéarité,

$$\begin{aligned}
\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad u_n(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}) &= \mathrm{X}^n\,(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)\\
&= \lambda\mathrm{X}^n\mathrm{P}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) + \mu\mathrm{X}^n\mathrm{Q}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)\\
&= \lambda u_n(\mathrm{P})(\mathrm{X}) + \mu u_n(\mathrm{Q})(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \qquad u_n(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})(\mathrm{X}) = (\lambda u_n(\mathrm{P}) + \mu u_n(\mathrm{Q}))(\mathrm{X})$$

Les polynômes $u_n(\lambda\mathrm{P}+\mu\mathrm{Q})$ et $(\lambda u_n(\mathrm{P}) + \mu u_n(\mathrm{Q}))$ sont égaux : u_n est bien une application linéaire. Concernant la composition, prenons $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. On a

$$u_n\big(u_n(\mathrm{P})\big)(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n\, u_n(\mathrm{P})\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right) = \mathrm{X}^n\, \left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)^n \mathrm{P}\left(\frac{1}{1/\mathrm{X}}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{X})$$

ce qui signifie bien que $u_n \circ u_n(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$, c'est-à-dire $u_n \circ u_n = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]}$.

$$\boxed{\text{L'application } u_n \text{ est une symétrie de } \mathbb{R}_n[\mathrm{X}].}$$

2 Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Posons $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$. On a vu à la question précédente que

$$u_n(\mathrm{P}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \mathrm{X}^k$$

Deux polynômes étant égaux si et seulement si tous leurs coefficients sont égaux,

$$\boxed{\mathrm{P} \in \mathscr{P} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \quad a_k = a_{n-k}}$$

De même
$$\boxed{\mathrm{P} \in \mathscr{D} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall k \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!] \quad a_k = -a_{n-k}}$$