Centrale Maths 1 MP 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Louet (ENS Cachan) ; il a été relu par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) et Guillaume Batog (Professeur agrégé).

L'épreuve est consacrée à l'étude d'une opération entre fonctions appelée convolution. Si sa définition générale n'est pas vraiment intuitive, elle se simplifie considérablement dans le cas de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ à support fini, qui est le contexte dans lequel cette opération est utilisée en ingénierie, plus spécifiquement en traitement d'images où, par exemple, on peut lisser des défauts en remplaçant la valeur d'un pixel par la moyenne des valeurs de 4 ou 8 pixels voisins. Dans ce problème, cette opération n'est abordée que pour les fonctions continues de la variable réelle.

- La première partie est consacrée à l'étude du produit de convolution de deux fonctions d'une variable réelle. On y étudie d'abord pour quels types de fonction ce produit est bien défini et son comportement par rapport aux fonctions de départ (continuité, uniforme continuité, dérivabilité), puis on établit le lien avec les séries de Fourier dans le cas où l'une des fonctions est périodique. Enfin, on utilise les résultats du début du problème et la notion d'approximation de l'unité pour démontrer le théorème de Weierstrass : toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
- La deuxième partie, dans le prolongement de la première, établit des propriétés plus fines de la convolution et le lien avec la transformation de Fourier. Deux questions délicates, étudiant l'intégrabilité de $f*g$ et l'effet de la transformation de Fourier sur un produit de convolution, nécessitent d'appliquer soigneusement le théorème de Fubini ; enfin, on termine en exploitant les résultats précédents et en utilisant là encore la notion d'approximation de l'unité, afin de montrer la formule d'inversion de Fourier dans le cas d'une fonction intégrable de transformée de Fourier intégrable.
- Dans la troisième partie, on aborde le thème de la codimension dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ de l'ensemble

  $$\{f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}) \ : \ f * g = 0\}$$

  où g est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Il est donc question d'algèbre linéaire en dimension finie et infinie. On fait le lien entre cet ensemble et la dimension de l'espace vectoriel V_g engendré par les translatées de g. On envisage dans un premier temps le cas d'une fonction g régulière ; puis, à l'aide d'un joli raisonnement par l'absurde, on s'y ramène dans le cas général en étudiant le comportement de V_{g_n}, où $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une approximation régulière de g.

Le sujet aborde donc des outils variés, essentiellement liés à l'analyse à une variable (intégrales à paramètres, séries de Fourier), mais aussi à l'algèbre linéaire. On y aborde des résultats classiques comme la formule d'inversion de Fourier, et d'autres plus originaux traitant d'algèbre linéaire dans l'espace vectoriel $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$. C'est un très beau problème, mais il est particulièrement long et certaines questions sont assez techniques.

Indications

Partie I

I.A.1.b Se souvenir que si deux fonctions sont de carré intégrable, leur produit est intégrable et l'on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

I.A.3 Remarquer que si $|x|$ est assez grand, $f(t)g(x-t)$ est nul pour tout t.

I.B.1 Écrire la définition de l'uniforme continuité et celle de la limite.

I.B.4 Commencer par montrer qu'une fonction continue à support compact est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Majorer alors $\|\mathrm{T}_\alpha(f)-f\|_2$ en fonction de $\|\mathrm{T}_\alpha(f)-f\|_\infty$ et du support (compact) de f, puis utiliser la question I.B.1.

I.B.5 Cette question est difficile. $\varepsilon > 0$ étant fixé, il faut introduire manuellement une fonction $\widetilde{f}$ à support compact qui coïncide avec f sur un intervalle $[\,-\mathrm{A}\,;\mathrm{A}\,]$ assez grand pour que l'intégrale de $|f^2|$ en dehors de cet intervalle soit plus petite que ε, puis appliquer la question précédente à $\widetilde{f}$.

I.C.1.a Appliquer directement le théorème de continuité sous le signe intégrale.

I.C.1.b Utiliser la question I.B.1.

I.C.2 Appliquer k fois le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale.

I.C.3.b Développer g en série de Fourier dans l'intégrale définissant $f*g(x)$, permuter l'intégration et la sommation et calculer le coefficient de Fourier de la fonction obtenue.

I.D.1 L'intégrale de δ_n valant 1, on peut écrire $f(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta_n(t)\,\mathrm{d}t$. Majorer ensuite $|f*\delta_n(x)-f(x)|$ en coupant l'intégrale obtenue selon que $|t| \leqslant \alpha$ ou $|t| \geqslant \alpha$ (α étant fixée de sorte que $|f(x-t)-f(x)|$ soit « petit » si $|t| \leqslant \alpha$).

I.D.2 Même démarche à la question précédente, mais α vient ici de l'uniforme continuité de f.

I.D.3.b Si x et t sont dans $[\,-1/2\,;1/2\,]$ alors $h_n(x-t)$ est un polynôme en x et t.

I.D.3.c Commencer par prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact, puis se ramener à l'intervalle $[\,-1/2\,;1/2\,]$.

Partie II

II.B.1.a Appliquer le théorème de Fubini à la fonction $(t,x) \mapsto f(t)g(x-t)$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Pour montrer que $f*g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, on majore toutes ses intégrales sur les segments $[\,-\mathrm{B}\,;\mathrm{B}\,]$ en faisant tendre A vers $+\infty$ dans l'expression

$$\int_{-\mathrm{B}}^{\mathrm{B}} \left(\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

II.B.1.b Appliquer la question I.B.1.a aux fonctions

$$u \mapsto f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu} \qquad \text{et} \qquad u \mapsto g(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xu}$$

II.B.2 Considérer la fonction valant, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $n^4\,(x-(n-1/n^3))$ sur $\left[\,n-1/n^3\,;n\,\right]$, $-n^4\,(x-(n+1/n^3))$ sur $\left[\,n\,;n+1/n^3\,\right]$ et nulle en dehors de ces intervalles.

II.D.1 Il faut là encore appliquer le théorème de Fubini, la fonction de deux variables étant, à t fixé, $(u,x) \mapsto f(u)k_n(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x(u+t)}$.

II.D.2 Montrer que les deux membres de la question précédente convergent simplement vers ceux de l'égalité cherchée. Attention, f n'étant pas supposée bornée, on ne peut pas lui appliquer directement la question I.D.1.

Partie III

III.A.1 Commencer par montrer l'équivalence $g = 0 \iff \varphi_g = 0$.

III.A.2 Si F est un supplémentaire de K dans E et $(f_1, \ldots, f_p)$ une base extraite de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, considérer l'application

$$x \mapsto (f_1(x), \ldots, f_p(x))$$

définie sur F, et montrer qu'elle est injective. Puis montrer que la famille $(f_1|_{\mathrm{F}}, \ldots, f_p|_f)$ est libre dans F^*.

III.A.3 L'énoncé est ici mal fait : il faut utiliser la question précédente avec la famille $(\varphi_{\mathrm{T}_\alpha(g)})_{\alpha\in\mathbb{R}}$, mais celle-ci est indexée sur $\mathbb{R}$ et non sur $\mathbb{N}$. Le mieux est de signaler que le résultat de III.A.2 reste valable dans ce cas.

III.A.4.b Poser $g_j(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_j t}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, où les $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta_j}$ sont deux à deux distincts ; il faut d'abord montrer que $(g_1, \ldots, g_n)$ est libre, puis l'exploiter pour prouver que si $g = g_1 + \cdots + g_n$, V_g est de dimension n. On utilise ici plusieurs fois les déterminants de Vandermonde.

III.B.1.a Utiliser la définition de la dérivée pour montrer que la dérivée de g est limite uniforme de fonctions qui sont dans V_g, qui est un espace de dimension finie.

III.B.1.b Redémontrer que les solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants sont sommes de fonctions produits d'un polynôme et d'une exponentielle.

III.C.2.a Si $(\psi_1, \ldots, \psi_p)$ est une base de F, la famille $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p})$ a pour matrice

$$\mathrm{M} = (\psi_i(a_j))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$$

dans la base duale $({\psi_1}^*, \ldots, {\psi_p}^*)$. On est donc amené à trouver $(a_1, \ldots, a_p)$ tel que $\det \mathrm{M}$ soit non nul. Il faut les construire par récurrence.

III.C.2.b La matrice $(f_j(a_i))_{1\leqslant i,j\leqslant p}$ est celle de $(f_1, \ldots, f_p)$ dans la base antéduale associée à $(e_{a_1}, \ldots, e_{a_p})$.

III.C.3 Montrer que $(m_1(\alpha), \ldots, m_p(\alpha))$ est image d'un vecteur de classe $\mathscr{C}^k$ par rapport à α par l'inverse de la matrice dont on vient de calculer le déterminant, qui ne dépend pas de α. Pour résoudre les questions suivantes, il faudra de plus montrer (ce qui n'est pas demandé dans l'énoncé) que les k dérivées des fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont bornées.

III.C.5 Cette question est particulièrement difficile. En raisonnant par l'absurde, on trouve une suite de vecteurs $(\lambda_1(k), \ldots, \lambda_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ de norme 1 et une suite $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'entiers, strictement croissante, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\lambda_1(k)h_{r_k} * \mathrm{T}_{\alpha_1}(g) + \cdots + \lambda_n(k)h_{r_k} * \mathrm{T}_{\alpha_n}(g) = 0$$

puis en passant à la limite par compacité, on trouve une combinaison linéaire non triviale nulle de $\mathrm{T}_{\alpha_1}(g), \ldots, \mathrm{T}_{\alpha_n}(g)$.

III.C.6 Pour $r \in \mathbb{N}^*$, h_r est de classe $\mathscr{C}^{r-1}$. En déduire que $h_r * g$ l'est également, puis montrer que les fonctions m_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$ sont chacune une combinaison linéaire des fonctions

$$\alpha \longmapsto (h_r * g)(a_i - \alpha)$$

pour un certain n-uplet de réels $(a_1, \ldots, a_n)$. En déduire non seulement que les fonctions $m_1, \ldots, m_n$ sont de classe $\mathscr{C}^\infty$, mais qu'elles vérifient l'hypothèse A.

III.C.7 Montrer à l'aide de la question précédente que g vérifie l'hypothèse A.

I. Produit de convolution

I.A Généralités

I.A.1.a Soit $x \in \mathbb{R}$. On a pour tout réel t l'inégalité :

$$|f(t)g(x-t)| \leqslant |f(t)|\,\|g\|_\infty$$

qui, comme $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, est intégrable par rapport à la variable t. Ainsi, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(t)g(x-t)|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right)\|g\|_\infty\end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. Finalement,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } f*g \text{ est bien définie et bornée sur } \mathbb{R},\\ \text{et l'on a la majoration } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_1\|g\|_\infty.\end{array}}$$

> En toute rigueur, pour pouvoir parler de la norme infinie de $f*g$, il faudrait montrer que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ (ou étendre la définition de la norme infinie aux fonctions seulement bornées), mais ce résultat étant demandé ultérieurement (question I.C.1), il ne semble pas attendu ici.

I.A.1.b Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction g est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$; dans l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g^2(u)\,\mathrm{d}u$, on effectue le changement de variable affine $u = x - t$ qui montre que $t \mapsto g(x-t)^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que l'on a l'égalité :

$$\int_{\mathbb{R}} g(x-t)^2\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} g(u)^2\,\mathrm{d}u$$

soit $\|g(x-\cdot)\|_2 = \|g\|_2$. Alors le produit de f et $g(x-\cdot)$ est intégrable (car les deux fonctions sont de carré intégrable) sur $\mathbb{R}$ et l'on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2\,\mathrm{d}t}\ \ \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |g(x-t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La fonction } f*g \text{ est bien définie et bornée sur } \mathbb{R},\\ \text{et on l'a la majoration } \|f*g\|_\infty \leqslant \|f\|_2\|g\|_2.\end{array}}$$

I.A.2 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, le changement de variable affine $x - t = u$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u)\,\mathrm{d}u$$

soit $$\boxed{f*g = g*f}$$