CCP Maths 2 MP 2012 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Christophe Fiszka (ENS Cachan) ; il a été relu par Jean Louet (ENS Cachan) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

L'énoncé se compose d'un court exercice et d'un problème à quatre parties.

- L'exercice propose d'étudier un problème de congruence modulo 11.

Le problème étudie l'endomorphisme :

$$\varphi_{\mathrm{A}} : \begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ \quad \mathrm{M} \quad \longmapsto \mathrm{AM} - \mathrm{MA} \end{cases}$$

et en particulier son noyau, qui est le commutant de la matrice A. Notons que $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) = [\mathrm{A}, \mathrm{M}]$, où $[\cdot, \cdot]$ est le crochet de Lie. Les quatre parties peuvent être traitées séparément mais il est préférable de les aborder dans l'ordre.

- Les deux premières parties proposent de montrer qu'une matrice réelle est diagonalisable si et seulement si φ_{A} l'est. La première étudie le cas où A est une matrice de taille 2, la seconde traite le cas général.
- La troisième partie est consacrée à l'étude du noyau de φ_{A} : les polynômes en A forment un sous-espace vectoriel de ce noyau ; si A est une matrice nilpotente d'indice maximal, le commutant est exactement l'ensemble des polynômes en A.
- Dans la dernière partie, on montre qu'une matrice propre de φ_{A} pour une valeur propre non nulle est forcément nilpotente.

Ce sujet est plutôt facile et très classique, ce qui en fait un bon problème de révision sur la réduction des endomorphismes et les matrices. Il requiert néanmoins une certaine dextérité dans les calculs : il convenait donc d'être particulièrement soigneux et précis lors de la rédaction.

Indications

Exercice

1 Calculer tout simplement les premiers termes. Au moins jusqu'à 5...

Problème

Partie I

I.4 Une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si, pour chaque valeur propre, la dimension de l'espace propre associé est égale à la multiplicité de la valeur propre en tant que racine du polynôme caractéristique.

Partie II

II.7.a.iii La relation ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{Y} = \overline{z}\mathrm{Y}$ implique par transposition ${}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{A} = \overline{z}\,{}^t\mathrm{Y}$.

II.7.b Les valeurs propres de φ_A sont réelles, et pourtant $2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\ z = z - \overline{z}$ appartient au spectre...

II.7.c Remarquer que $\mathrm{AP}_{i,j} = \varphi_\mathrm{A}(\mathrm{P}_{i,j}) + \mathrm{P}_{i,j}\mathrm{A}$.

II.7.d À partir de $(\mathrm{P}_{i,j}\mathrm{X})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, extraire une base de vecteurs propres de A.

Partie III

III.8 $(\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \ldots, \mathrm{A}^{m-1})$ est une base si et seulement si elle est libre et génératrice. Si la famille n'est pas libre, on peut exhiber un polynôme annulateur de degré inférieur à celui du polynôme minimal. La famille est génératrice grâce à une division euclidienne par le polynôme minimal.

III.10.a Montrer que la famille est libre par récurrence.

III.10.b Il y a égalité entre deux endomorphismes s'ils prennent les mêmes valeurs sur une base, par exemple la base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.

III.11.a Utiliser le lemme suivant pour deux endomorphismes f et g de $\mathbb{R}^n$:

$$\text{Si } f \circ g = g \circ f \text{ alors } g(\mathrm{Ker}\ f) \subset \mathrm{Ker}\ f.$$

III.11.c On trouve $\sum\limits_{i=1}^{p} {m_i}^2$ en analysant chaque bloc.

III.11.d Pour chaque valeur de p allant de 1 à 7, il faut dénombrer l'ensemble des p-uplets $(m_1, \ldots, m_p)$ tels que

$$m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_p \qquad \text{et} \qquad m_1 + \cdots + m_p = n = 7$$

Partie IV

IV.12 Procéder par récurrence avec $\varphi_\mathrm{A}(\mathrm{B}^{k+1}) = (\mathrm{AB}^k)\mathrm{B} - \mathrm{B}^k(\mathrm{BA})$. Puis utiliser l'hypothèse de récurrence $\varphi_\mathrm{A}(\mathrm{B}^k) = \alpha k \mathrm{B}^k$ et $\mathrm{AB} - \mathrm{BA} = \alpha\mathrm{B}$.

IV.13 La question précédente donne le résultat pour les monômes X^k.

IV.14 Montrer que $\mathrm{X}\pi'_\mathrm{B} - d\pi_\mathrm{B}$ est un polynôme annulateur. Que dire de son degré ?

IV.15 En utilisant la question précédente, montrer que $\pi_\mathrm{B} = \mathrm{X}^d$.

Exercice

1 Calculons 3^p pour p variant de 1 à 5 en utilisant les propriétés des congruences :

$$\begin{aligned}
3 &\equiv 3\,[11] \\
3^2 &\equiv 9 \equiv -2\,[11] \\
3^3 &\equiv 27 \equiv 5\,[11] \\
3^4 &\equiv (3^2)^2 \equiv (-2)^2 \equiv 4\,[11] \\
3^5 &\equiv 3 \times 3^4 \equiv 3 \times 4 \equiv 12 \equiv 1\,[11]
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\text{5 est le plus petit entier naturel } p \text{ non nul tel que } 3^p \equiv 1\,[11].}$

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a la suite de congruences :

$$\begin{aligned}
3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} &\equiv 3^n 3^{2012} - 3^2 (5^2)^n \\
&\equiv 3^2 (3^n 3^{5\times 402} - 25^n) && 2012 = 5 \times 402 + 2 \\
&\equiv 3^2 (3^n (3^5)^{402} - 3^n) && \text{car } 25 \equiv 3\,[11] \\
&\equiv 3^2 (3^n - 3^n) && \text{car } 3^5 \equiv 1\,[11] \\
3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} &\equiv 0\,[11]
\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} \text{ est divisible par 11.}}$

Comme pour $2, 5, 9$ et 10, il existe un critère simple pour savoir si un nombre est divisible par 11. Si $n = a_p \ldots a_1 a_0$ est l'écriture en base 10 du nombre n,

$$a_p \ldots a_1 a_0 \equiv \sum_{i=0}^{p} a_i 10^i \equiv \sum_{i=0}^{p} a_i (-1)^i\,[11]$$

Ainsi, 11 divise n si et seulement si $\sum_{i=0}^{p} (-1)^i a_i \equiv 0\,[11]$. Par exemple,

$$9281708403 \equiv 3 + 4 - 8 - 7 + 1 - 8 + 2 - 9 \equiv -22 \equiv 2 - 2 \equiv 0\,[11]$$

donc 9281708403 est divisible par 11.

Problème

I. Étude du cas $n = 2$

I.1 Pour tout $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}) &= \mathrm{A}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}) - (\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N})\mathrm{A}\\
&= \mathrm{AM} - \mathrm{MA} + \lambda(\mathrm{AN} - \mathrm{NA})\\
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}+\lambda\mathrm{N}) &= \varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{M}) + \lambda\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{N})
\end{aligned}$$

donc $\boxed{\varphi_{\mathrm{A}} \text{ est une application linéaire.}}$

De surcroît, $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{I}_2) = \mathrm{A}.\mathrm{I}_2 - \mathrm{I}_2.\mathrm{A} = \mathrm{A} - \mathrm{A} = 0$ et $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}.\mathrm{A} - \mathrm{A}.\mathrm{A} = 0$ donc

$$\boxed{(\mathrm{I}_2, \mathrm{A}) \in (\mathrm{Ker}\,(\varphi_{\mathrm{A}}))^2}$$

En particulier, si A n'est pas une matrice scalaire, le noyau est au moins de dimension 2.

I.2 Pour donner la matrice de φ_{A} dans la base $\mathrm{E} = (\mathrm{E}_{1,1}, \mathrm{E}_{2,2}, \mathrm{E}_{1,2}, \mathrm{E}_{2,1})$, il faut expliciter chaque élément $\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_{i,j})$ dans la base E :

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_{1,1}) &= \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a & 0\\ c & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_{1,1}) &= \begin{pmatrix} 0 & -b\\ c & 0\end{pmatrix} = c\mathrm{E}_{2,1} - b\mathrm{E}_{1,2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_{2,2}) &= \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & b\\ 0 & d\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0\\ c & d\end{pmatrix}\\
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_{2,2}) &= \begin{pmatrix} 0 & b\\ -c & 0\end{pmatrix} = b\mathrm{E}_{1,2} - c\mathrm{E}_{2,1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_{1,2}) &= \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & a\\ 0 & c\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\
\varphi_{\mathrm{A}}(\mathrm{E}_{1,2}) &= \begin{pmatrix} -c & a-d\\ 0 & c\end{pmatrix} = (a-d)\mathrm{E}_{1,2} + c\mathrm{E}_{2,2} - c\mathrm{E}_{1,1}
\end{aligned}$$