Mines Maths 2 PSI 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Jean Louet (ENS Cachan) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce problème est consacré à l'étude précise d'une équation différentielle modélisant une poursuite. Le comportement de ses solutions, selon les paramètres, permet de déterminer si le poursuivant rattrapera le poursuivi. C'est un problème qui aurait pu être très difficile, mais les résultats essentiels sont rappelés en préambule et l'énoncé donne beaucoup d'indications sur les méthodes à utiliser.

- La première partie repose principalement sur le théorème de Cauchy-Lipschitz et sur de l'analyse élémentaire, comme le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis. Si certains raisonnements sont un peu fins, plusieurs indications figurent cependant dans l'énoncé. De plus, garder à l'esprit l'analogie physique du lièvre et de la tortue permet de s'approprier facilement les résultats démontrés dans cette partie afin de les réutiliser par la suite.
- La deuxième partie est consacrée à l'étude de deux exemples. On n'y trouvera pas, comme dans la partie précédente, l'utilisation de théorèmes profonds, mais des calculs qui peuvent être astucieux et sollicitent donc un autre type de compétences. La cerise sur le gâteau est de comprendre la situation physique décrite dans chacun des deux cas.
- La dernière partie est plus théorique, le but étant de montrer qu'il n'y a pas de capture possible sous une certaine condition. Après quelques questions techniques, on termine par un joli raisonnement par l'absurde.

En résumé, c'est un très beau problème, intéressant à travailler, entre autres parce qu'il aborde des aspects assez inhabituels de la théorie des équations différentielles. Il est relativement difficile et utilise tout le cours de spéciale sur la question. Il est donc préférable d'attendre que le cours soit fini (et même bien assimilé) pour vous y attaquer.

Indications

Partie 1

1 Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

2 Penser que la fonction λ est bornée sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,]$. Conclure en utilisant le théorème des accroissements finis.

3 Utiliser le résultat de la première question.

4 Remarquer (pour conclure) que $\phi(0, x_0) \neq \phi(0, y_0)$.

Partie 2

6 Remarquer que l'équation différentielle est à variables séparables.

7 Identifier $\phi_0'(t)$ et $\dfrac{2}{\phi_0(t) - \lambda_1(t)}$ pour déterminer a.

8 Rester calme... ce n'est que du calcul.

9 Simplifier le calcul de la dérivée en utilisant l'équation différentielle et celui de la question précédente.

10 Introduire la fonction $t \mapsto \ln(2-t) + \dfrac{2}{2-t}$ et étudier ses variations.

11 Utiliser le résultat de la question 5.

Partie 3

12 Déterminer F par identification, puis poser $u = s/t$ et étudier les variations de la fonction obtenue.

14 Poser $b = r^2$. Pour la conclusion, penser que le temps de vie $\mathrm{T}(x_0)$ vérifie $x(\mathrm{T}(x_0)) = \lambda(\mathrm{T}(x_0))$.

15 Utiliser la croissance de x vue à la question 1, puis la définition de $\mathrm{M}(\lambda)$ pour obtenir l'inégalité

$$x'(t) \geqslant \frac{2}{\mathrm{M}(\lambda)\,\sqrt{1-t}}$$

qu'on intègre entre t et 1.

16 Utiliser la question précédente en pensant que $x(1) = \lambda(1)$.

17 Se servir des méthodes employées aux questions 15 et 16.

18 Remarquer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \mathrm{M}(\lambda) - \frac{4}{x}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Utiliser la question 17 pour montrer qu'elle est à valeurs positives puis aboutir à une contradiction en étudiant les points fixes de la fonction f.

Tout au long du problème, il sera bon de se replacer dans le contexte cinématique du lièvre et de la tortue pour interpréter facilement les résultats demandés par l'énoncé et comprendre pourquoi ils sont « naturels ». Il sera d'autant plus facile de s'en souvenir pour les réutiliser par la suite au moment opportun.

On notera que comme certains élèves de prépa, la tortue a besoin d'être talonnée par le lièvre pour être efficace : tant que l'échéance est lointaine, elle avance d'un pas tranquille, mais quand le lièvre se rapproche, elle s'oblige à passer la vitesse supérieure. Tout le jeu consiste à savoir dans quel cas cette stratégie est efficace et s'il n'aurait pas mieux valu bien avancer dès le début.

1. Généralités

1 Puisque $\phi(\cdot, x_0)$ est solution de l'équation $x'(t) = 2/(x(t) - \lambda(t))$ sur l'intervalle $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$, la fonction $\phi(\cdot, x_0)'$ est définie sur l'intervalle $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$, ce qui entraîne que la fonction $t \mapsto \phi(t, x_0) - \lambda(t)$ est non nulle sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$. Cette dernière fonction étant continue, elle est, d'après le théorème des valeurs intermédiaires soit strictement positive, soit strictement négative. Comme en $t = 0$, $\phi(0, x_0) = x_0 > 0 = \lambda(0)$, la fonction $t \mapsto \phi(t, x_0) - \lambda(t)$ est positive en 0 donc positive sur tout $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$. Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in [\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[\qquad \phi(t, x_0) > \lambda(t)}$$

La tortue est partie devant et comme la téléportation n'est pas de ce monde (n'en déplaise à M. Spock), la tortue reste devant le lièvre tant qu'elle n'a pas été rattrapée (capturée).

D'après ce qui précède, $\phi(\cdot, x_0)'$ est positive sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$ ce qui implique que

$$\boxed{\text{La fonction } \phi(\cdot, x_0) \text{ est croissante.}}$$

Pour éviter d'être rattrapé, mieux vaut aller de l'avant !

Puisque $\phi(\cdot, x_0)$ est croissante, soit elle est bornée et admet alors une limite réelle quand t tend vers $+\infty$, soit elle ne l'est pas et tend alors vers $+\infty$.

2 La fonction λ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Elle est par conséquent bornée sur le segment $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,]$. De ce fait,

$$\lim_{\substack{t \to \mathrm{T}(x_0) \\ t < \mathrm{T}(x_0)}} \phi(t, x_0) = +\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{\substack{t \to \mathrm{T}(x_0) \\ t < \mathrm{T}(x_0)}} \phi(t, x_0) - \lambda(t) = +\infty$$

Puisque $\phi(\cdot, x_0)$ est solution de l'équation différentielle $\mathrm{E}(\lambda)$,

$$\lim_{\substack{t \to \mathrm{T}(x_0) \\ t < \mathrm{T}(x_0)}} \phi(\cdot, x_0)'(t) = \lim_{\substack{t \to \mathrm{T}(x_0) \\ t < \mathrm{T}(x_0)}} \frac{2}{\phi(t, x_0) - \lambda(t)} = 0$$

On en déduit en utilisant l'équation différentielle que $\phi(\cdot, x_0)'$ est continue sur l'intervalle $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$. Puisqu'elle admet une limite finie quand t tend vers $\mathrm{T}(x_0)$, elle est prolongeable en une fonction continue sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,]$. Ce prolongement étant une fonction continue sur un segment, il est en particulier borné et il en est de même de la fonction $\phi(\cdot, x_0)'$ sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$. Soit M le maximum de $\phi(\cdot, x_0)'$ sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\forall t \in [\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[\qquad |\phi(t, x_0) - \phi(0, x_0)| \leqslant \mathrm{M}\,|t - 0| \leqslant \mathrm{M}\,\mathrm{T}(x_0)$$

Par inégalité triangulaire,

$$\forall t \in [\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[\qquad |\phi(t,x_0)| \leqslant |\phi(0,x_0)| + \mathrm{M}\,\mathrm{T}(x_0)$$

donc la fonction $\phi(\cdot,x_0)$ est bornée sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse de limite infinie de $\phi(\cdot,x_0)$ en $\mathrm{T}(x_0)$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \ell \text{ tel que } \lim_{\substack{t\to\mathrm{T}(x_0)\\ t<\mathrm{T}(x_0)}} \phi(t,x_0) = \ell.}$$

> Une tortue ne peut guère parcourir une distance infinie en un temps fini. Il s'agit à nouveau d'un avantage que la téléportation possède sur la réalité.

3 D'après la première question, on a

$$\forall t \in [\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[\qquad \lambda(t) < \phi(t,x_0)$$

Comme $\phi(\cdot,x_0)$ admet une limite ℓ par valeurs inférieures en $\mathrm{T}(x_0)$ d'après la question précédente et que λ est continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut passer à la limite quand t tend vers $\mathrm{T}(x_0)$ par valeurs inférieures dans l'inégalité précédente pour obtenir

$$\boxed{\lambda(\mathrm{T}(x_0)) \leqslant \ell}$$

> Le lièvre n'ayant d'autre choix que d'avancer en ligne droite, il ne peut avoir parcouru une distance plus grande que celle parcourue par la tortue (en ajoutant bien sûr le handicap de départ).

Si $\lambda(\mathrm{T}(x_0)) < \ell$, $\phi(t,x_0)' = 2/(\phi(t,x_0) - \lambda(t))$ admet une limite réelle égale à $2/(\ell - \lambda(\mathrm{T}(x_0)))$ quand t tend vers $\mathrm{T}(x_0)$. La fonction $\phi(\cdot,x_0)$ admet donc un prolongement $\mathscr{C}^1$ à l'intervalle $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,]$. Ce prolongement, que l'on désigne par ψ_1, est alors solution de l'équation différentielle sur $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,]$. L'alinéa 1 du théorème 1 avec la condition initiale ℓ en $\mathrm{T}(x_0)$ assure qu'il existe un intervalle du type $]\,\mathrm{T}(x_0)-a\,;\mathrm{T}(x_0)+a\,[$ et une solution ψ_2 définie sur $]\,\mathrm{T}(x_0)-a\,;\mathrm{T}(x_0)+a\,[$ prenant la valeur ℓ en $\mathrm{T}(x_0)$. D'après l'unicité de la solution avec condition initiale fixée (alinéa 2 du théorème 1), ψ_1 et ψ_2 sont égales sur $]\,\mathrm{T}(x_0)-a\,;\mathrm{T}(x_0)\,]$. Il en résulte que ψ_2 induit un prolongement à $[\,0\,;\mathrm{T}(x_0)+a\,[$ de la solution $\phi(\cdot,x_0)$ qui devait être maximale. La contradiction assure que

$$\boxed{\lambda(\mathrm{T}(x_0)) = \ell}$$

> La notion de capture renvoie bien au fait que le lièvre doit être au même endroit que la tortue au moment de ladite capture.

4 Supposons qu'il existe $t_1 \in [\,0\,;\mathrm{T}(x_0)\,[\cap [\,0\,;\mathrm{T}(y_0)\,[$ tel que $\phi(t_1,x_0) = \phi(t_1,y_0)$. En appliquant l'alinéa 2 du théorème 1, on en déduit que les solutions $\phi(\cdot,x_0)$ et $\phi(\cdot,y_0)$, qui coïncident en t_1, sont égales sur l'intervalle $[\,0\,;\min(\mathrm{T}(x_0),\mathrm{T}(y_0))\,[$, ce qui est **impossible** puisque $\phi(0,x_0) = x_0 \neq y_0 = \phi(0,y_0)$ par hypothèse.

> En physique on parle de déterminisme de la trajectoire : les mêmes conditions initiales donnent toujours les mêmes trajectoires.