CCP Maths 2 PSI 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Nicolas Weiss (Professeur agrégé) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Dans ce sujet, certains aspects de la classification des formes quadratiques, et des quadriques correspondantes, sont mis en relation avec des propriétés du spectre et de la trace des endomorphismes autoadjoints associés.

Le sujet comporte quatre parties de difficultés équivalentes. Les parties II et III sont intimement liées tandis que les parties I et IV se traitent de façon indépendante.

- La première partie élabore une typologie de l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ tels que $(s(x) \mid x) = 1$, suivant le signe des valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint s de $\mathbb{R}^n$. Deux exemples pratiques sont traités au préalable ; ils illustrent le lien entre les valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}^2$ et le type de conique qui lui correspond.
- La deuxième partie explore d'abord le lien entre valeurs propres d'un endomorphisme autoadjoint et positivité de la forme bilinéaire symétrique correspondante. Une étude classique mais approfondie de la racine carrée d'une matrice symétrique positive réelle est ensuite entreprise.
- La troisième partie donne une autre caractérisation des matrices symétriques positives réelles, par une propriété de minoration de leur trace.
- La quatrième partie enfin, s'intéresse au problème initial en partant d'un autre point de vue. Plutôt que de se demander si l'ensemble des points de s-norme constante est compact, on observe la croissance du produit $(s(x) \mid x)(s^{-1}(x) \mid x)$ dans le cas des formes bilinéaires positives, et on établit une relation de la forme

$$(s(x) \mid x)(s^{-1}(x) \mid x) = \mathrm{O}(\|x\|^4)$$

L'approche adoptée par ce sujet est classique. Elle nécessite surtout une connaissance précise et approfondie des éléments du programme qui concernent la réduction des endomorphismes, la théorie spectrale dans le cas réel, et les coniques.

Indications

Partie I

I.1.1 Utiliser le polynôme caractéristique de S et la matrice de l'endomorphisme s dans une base orthonormale de vecteurs propres.

I.1.2 Même démarche.

I.2.1 Pour montrer que Σ est borné, utiliser le signe des valeurs propres de s.

I.2.2.1 Même démarche.

Partie II

II.1.1 Calculer ${}^t\mathrm{X}_i\,\mathrm{S}\mathrm{X}_i$ pour tout $i \in [\![\, 1\,;\, n \,]\!]$.

II.1.3 Utiliser le fait que S est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée.

II.2.1 Montrer que les applications linéaires qui correspondent à Δ et N dans la base canonique coïncident sur une base de vecteurs propres de N.

II.2.2 Déduire T de Δ par conjugaison puis utiliser le résultat de la question II.2.1.

II.3.2 Le vecteur propre X_i de P(S) est associé à la valeur propre $\sqrt{\lambda_i}$.

II.3.3 Utiliser la formule de P(S) de la question II.3.2.

Partie III

III.1.1 On pourra majorer les réels $|v_{i,j}|$ par une constante.

III.1.2 Utiliser la diagonalisabilité de S dans une base orthonormée.

III.2.1 Considérer la forme trigonométrique du nombre complexe $b + \mathrm{i}a$.

III.2.2 S'appuyer sur la dernière assertion de la question III.2.1.

III.2.3 Utiliser le lien entre la trace d'une matrice carrée et son spectre.

Partie IV

IV.1 Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz et relier $\|t(x)\|$ et $(s(x) \mid x)$.

IV.2 Factoriser P.

IV.3 Utiliser le signe de $\mathrm{P}(\lambda_i)$ et décomposer le vecteur x dans une base orthonormale adaptée de vecteurs propres de T.

IV.4 Ne pas chercher d'astuce à cette question. Attention : si vous souhaitez l'utiliser, il faut justifier l'orthogonalité des vecteurs v_1 et v_n.

Les conseils du jury

Le rapport du jury insiste sur la présentation des copies : « faire ressortir les résultats est essentiel ! Pour une bonne lisibilité des copies, les étudiants doivent éviter un excès de ratures et une utilisation abusive du blanc correcteur. » Il recommande également aux candidats « de donner tous les arguments qui justifient les démonstrations. Ces arguments sont indispensables aux correcteurs pour évaluer les connaissances et juger la qualité des raisonnements des étudiants, et donc pour leur attribuer le maximum de points sur les questions traitées. »

I. Étude de compacité

I.1.1 Les valeurs propres de la matrice S sont les racines de son polynôme caractéristique

$$\chi_{\mathrm{S}} = \det(\mathrm{S} - \mathrm{X}\mathrm{I}_2) = \mathrm{X}^2 - (\mathrm{Tr}\ \mathrm{S})\,\mathrm{X} + \det \mathrm{S} = \mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} + 5 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-5)$$

Les valeurs propres sont donc 1 et 5.

Cherchons le sous-espace propre de S associé à la valeur propre 1.

$$\begin{aligned}
\mathrm{SX} = \mathrm{X} &\iff \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + \sqrt{3}x_2 = x_1 \\ \sqrt{3}x_1 + 4x_2 = x_2 \end{array} \right. \\
\mathrm{SX} = \mathrm{X} &\iff x_1 = -\sqrt{3}x_2
\end{aligned}$$

Le sous-espace propre de S associé à la valeur propre 1 est ainsi engendré par le vecteur $v_1 = {}^t(-\sqrt{3}/2, 1/2)$ choisi pour être de norme 1.

Comme S est symétrique, elle admet une base orthonormée de vecteurs propres. Le sous-espace propre de S associé à la valeur propre 5 est donc engendré par le vecteur $v_5 = {}^t(1/2, \sqrt{3}/2)$, orthogonal à v_1 et normé.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Les valeurs propres de S sont 1 et 5 et leurs sous-espaces} \\ \text{propres sont les droites vectorielles respectivement dirigées par} \\ v_1 = {}^t(-\sqrt{3}/2, 1/2) \quad \text{et} \quad v_5 = {}^t(1/2, \sqrt{3}/2)\end{array}}$$

Calculons
$$\begin{aligned}
(x \mid s(x)) &= (x_1 e_1 + x_2 e_2 \mid (2x_1 + \sqrt{3}x_2)e_1 + (\sqrt{3}x_1 + 4x_2)e_2) \\
&= x_1(2x_1 + \sqrt{3}x_2) + x_2(\sqrt{3}x_1 + 4x_2) \qquad \text{car } (e_1 \mid e_2) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{(x \mid s(x)) = 2x_1^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 + 4x_2^2}$$

> On pouvait écrire aussi directement $(x \mid s(x)) = (x_1, x_2)\mathrm{S}\,{}^t(x_1, x_2)$.

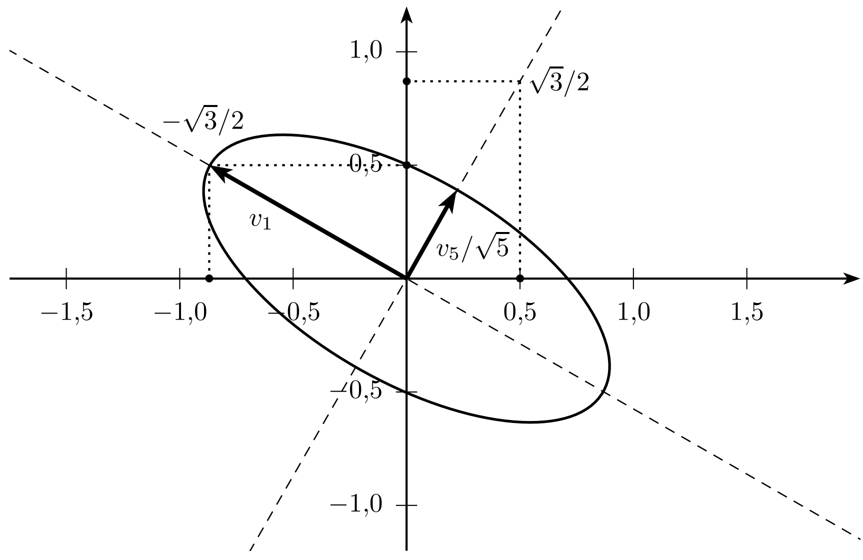
Dans la base orthonormée (v_1, v_5), la matrice de l'endomorphisme s est $\mathrm{diag}(1, 5)$. Si l'on décompose le vecteur x de $\mathbb{R}^2$ en $x = y_1 v_1 + y_5 v_5$ dans cette base, on peut recalculer $(x \mid s(x))$:

$$(x \mid s(x)) = 1\,y_1^2 + 5\,y_5^2$$

L'ensemble Σ est ainsi défini par l'équation $y_1^2 + 5y_5^2 = 1$ dans la base (v_1, v_5). C'est l'équation réduite d'une ellipse dont les axes principaux sont dirigés par v_1 et v_5 et dont les demi-longueurs des axes sont 1 et $1/\sqrt{5}$ respectivement.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{L'ensemble } \sigma \text{ est une ellipse d'équation réduite} \\ \text{donnée par } y_1^2 + 5y_5^2 = 1 \text{ dans le repère } (v_1, v_5).\end{array}}$$

> Le rapport du jury rappelle qu'il fallait tracer l'ellipse dans le repère $\mathcal{R}$ plutôt que dans le repère propre.



I.1.2 On procède de façon analogue à la question précédente : les valeurs propres de la matrice S sont les racines de son polynôme caractéristique

$$\chi_{\mathrm{S}} = \det(\mathrm{S} - \mathrm{XI}_2) = \mathrm{X}^2 - (\mathrm{Tr}\ \mathrm{S})\,\mathrm{X} + \det \mathrm{S} = \mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} = \mathrm{X}(\mathrm{X} - 6)$$

Les valeurs propres sont donc 0 et 6.

Cherchons le sous-espace propre de S associé à la valeur propre 0.

$$\begin{aligned}\mathrm{SX} = 0 &\iff \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \left\{\begin{array}{l} 2x_1 + 2\sqrt{2}x_2 = 0 \\ 2\sqrt{2}x_1 + 4x_2 = 0 \end{array}\right. \\ \mathrm{SX} = 0 &\iff x_1 = -\sqrt{2}x_2\end{aligned}$$

Le sous-espace propre de S associé à la valeur propre 0 est ainsi engendré par le vecteur $v_0 = {}^t(-\sqrt{2}/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ choisi pour être de norme 1.

Ici encore, tout vecteur orthogonal à v_0 est un générateur du sous-espace propre de S associé à la valeur propre 6, et on choisit $v_6 = {}^t(1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}))$ qui est normé.

> Les valeurs propres de S sont 0 et 6 et leurs sous-espaces propres sont les droites vectorielles dirigées respectivement par
>
> $$v_0 = {}^t(-\sqrt{2}/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \text{ et } v_6 = {}^t(1/\sqrt{3}, \sqrt{2}/\sqrt{3}).$$

Dans la base orthonormée (v_6, v_0), la matrice de l'endomorphisme s est $\mathrm{diag}(6, 0)$. Si l'on décompose le vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ en $x = y_6 v_6 + y_0 v_0$ dans cette base, on peut calculer

$$(x \mid s(x)) = 6y_6^2$$

L'ensemble Σ est ainsi défini par l'équation $6y_6^2 = 1$ dans la base (v_6, v_0). Cette équation est équivalente à $y_6 = \pm\, 1/\sqrt{6}$. Comme le choix de la coordonnée suivant v_0 est libre, on a affaire à deux droites parallèles et symétriques par rapport à la droite dirigée par le vecteur v_0.