Mines Physique 2 PC 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sandrine Ngo (ENS Cachan) ; il a été relu par Pierre Lacas (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet, divisé en trois parties indépendantes, aborde différents aspects de la propagation de la lumière dans une fibre optique à saut d'indice.

- Dans la première partie, cette propagation est étudiée du point de vue de l'optique géométrique. On cherche à caractériser la fibre et ses performances (calcul de l'ouverture numérique, de la bande passante, etc.).
- La seconde partie traite de l'aspect ondulatoire de la propagation par le calcul de la structure transverse de l'onde électromagnétique. On étudie aussi les conditions de réalisation d'une fibre monomode et on aborde le problème de la dispersion intramodale.
- Dans la troisième partie, on réalise une modélisation microscopique de l'effet Kerr optique, un effet non linéaire qui peut apparaître sous certaines conditions dans la fibre. Cet effet a pour conséquence un phénomène d'automodulation de phase. Enfin, on envisage l'existence possible de solitons optiques.

Le problème fait appel à des notions classiques d'optique géométrique et d'électromagnétisme dans les milieux diélectriques ; il constitue une bonne révision de ces chapitres. La résolution de certaines questions demande une très bonne maîtrise des formules et définitions du cours, notamment les équations de Maxwell dans les milieux et la définition de la susceptibilité électrique. Mais bien souvent, il suffit d'un peu de raisonnement et de bon sens pour répondre. Les calculs, sans être complexes, peuvent parfois être longs et demandent donc une attention particulière afin d'éviter erreurs et étourderies.

Indications

I. Approche géométrique de la propagation

2 Pour exprimer l'ouverture numérique en fonction des indices, penser à la relation trigonométrique $\cos^2 i_\ell + \sin^2 i_\ell = 1$.

4 Calculer d'abord les temps de parcours minimal et maximal. La lumière se propage dans un milieu d'indice n avec une célérité $v = c/n$.

5 Faire un développement limité au premier ordre en Δ.

6 Considérer le fait que deux rayons qui pénètrent dans la fibre au même instant avec des angles d'incidence différents n'auront pas le même temps de parcours.

7 La période des impulsions doit être supérieure à leur largeur pour qu'il n'y ait pas de recouvrement.

II. Approche ondulatoire de la propagation

12 Le champ électrique dans le milieu diélectrique vérifie l'équation de d'Alembert avec une célérité $v = c/n$

13 Injecter e_2 dans l'équation de la question 12 pour déterminer β. Faire de même avec e_1 ou e_3 afin de calculer α.

14 Pour déterminer la valeur maximale de r, considérer l'expression de α établie à la question précédente.

15 Dans chacun des trois milieux, relier les champs électrique et magnétique à l'aide de la loi de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{E}} = -\partial\overrightarrow{\text{B}}/\partial t$

18 Pour déterminer la valeur maximale de $f(r)$, considérer que f est strictement croissante sur $[0, r_\ell]$. L'équation $f(r) = y$ possède au moins une solution si $\min f(r) \leqslant y \leqslant \max f(r)$.

III. Phénomène optique non linéaire : effet Kerr

21 Évaluer le champ électrique intra-atomique en considérant que l'électron ressent le champ généré par une charge ponctuelle e à une distance r de l'ordre du rayon atomique.

22 La grandeur $\hbar$ est homogène à un moment cinétique.

23 Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron soumis à une force électrique et une force de rappel $\overrightarrow{\text{F}}$.

24 $z_0(t)$ vérifiant une équation du second ordre avec second membre, c'est la somme d'une solution générale de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation avec second membre à exprimer en régime sinusoïdal forcé.

25 $z_1(t)$ vérifie une équation du second ordre avec un second membre en ${z_0}^3(t)$.

26 Dans le premier cas, exprimer P_z en fonction du moment dipolaire de chaque atome. Dans le second cas, considérer la relation linéaire qui existe entre le vecteur polarisation et le champ électrique.

28 Calculer $\dfrac{\partial |\underline{\text{A}}|^2}{\partial x}$ en utilisant l'équation vérifiée par $\underline{\text{A}}$.

29 Résoudre l'équation du premier ordre à coefficients constants en x vérifiée par $\underline{\text{A}}$.

30 Considérer deux cas selon le signe de Γ.

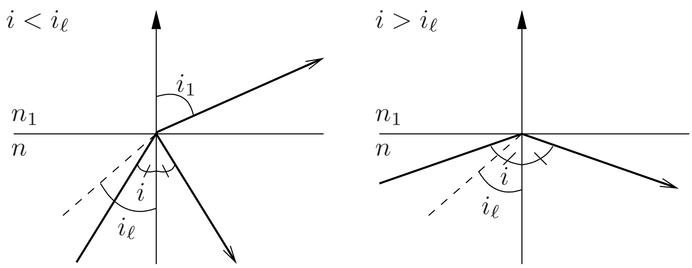
Fibre optique à saut d'indice

I. Approche géométrique de la propagation

1 À l'interface entre le cœur et la gaine, si le rayon incident est réfracté et pénètre dans la gaine avec un angle réfracté i_1, la loi de Snell-Descartes impose que

$$n\,\sin i = n_1\,\sin i_1$$

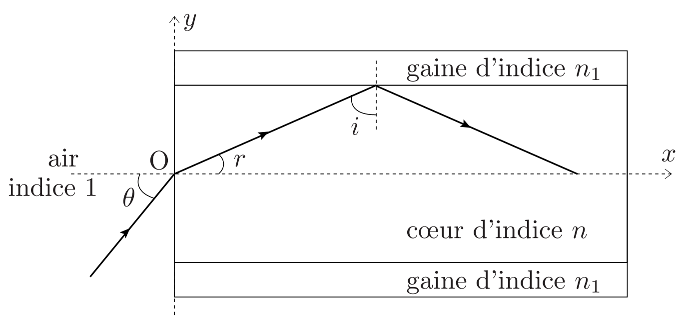
Or l'angle i_1 ne peut dépasser $\pi/2$ dans le cas présent où $n > n_1$, donc la réfraction n'est possible que si $n\,\sin i < n_1$. Dans le cas où $n\,\sin i > n_1$, il n'existe pas de rayon réfracté correspondant à un chemin optique extrémal. On observe en revanche une réflexion totale du rayon incident.



$$\boxed{\text{Le rayon reste confiné si } i > i_\ell \text{ avec } \sin i_\ell = \frac{n_1}{n} \text{ et } i_\ell \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].}$$

2 À l'interface entre l'air et le cœur, la loi de Snell-Descartes, à nouveau, indique

$$\sin\theta = n\,\sin r$$



Or la géométrie de la fibre donne $r = \pi/2 - i$, donc θ et i sont reliés par

$$\sin\theta = n\,\sin\left(\frac{\pi}{2} - i\right) = n\,\cos i$$

Comme les fonctions sinus et cosinus sont respectivement strictement croissante et décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$, la condition $i > i_\ell$ équivaut à

$$\boxed{\theta < \theta_\ell \quad \text{avec} \quad \sin\theta_\ell = n\,\cos i_\ell}$$

En utilisant la relation trigonométrique $\cos^2 i_\ell + \sin^2 i_\ell = 1$ et en sachant que $\cos i_\ell > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{ON} &= \sin\theta_\ell \\
&= n\sqrt{1-\sin^2 i_\ell} \\
&= n\sqrt{1-(n_1/n)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{ON} = \sqrt{n^2 - {n_1}^2}}$$

3 On calcule l'ouverture numérique à l'aide des données de l'énoncé

$$\boxed{\mathrm{ON} = \sqrt{1{,}5^2 - 1{,}47^2} = 0{,}298}$$

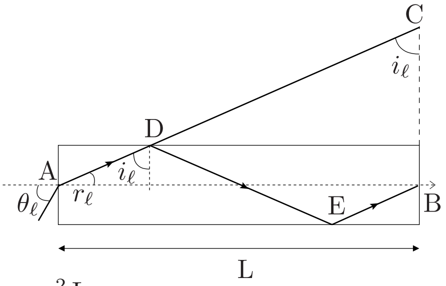
4 Le milieu dans lequel se propage la lumière est d'indice uniforme, donc tous les rayons ont la même vitesse. Le temps de parcours minimal (respectivement maximal) correspond alors au trajet le plus court (respectivement long). Or la longueur du trajet croît en fonction de l'angle d'incidence.

$$\boxed{\text{Le temps de parcours est minimal si } \theta = 0. \text{ Il est maximal si } \theta = \theta_\ell.}$$

On note t_{min} et t_{max} les temps de parcours minimal et maximal. t_{min} est le temps mis par le rayon pour parcourir une distance L à la vitesse c/n qui est la vitesse de la lumière dans la fibre, soit

$$t_{\text{min}} = \frac{n\,\mathrm{L}}{c}$$

Un rayon d'incidence θ_ℓ parcourt dans la fibre une distance égale à l'hypoténuse d'un triangle rectangle possédant un angle aigu i_ℓ et de côté opposé L. On peut le constater sur la figure ci-contre, où la trajectoire du rayon lumineux, constituée des segments [AD], [DE] et [EB] a pour longueur [AC]. Cela correspond à une distance parcourue $\mathrm{L}/\sin i_\ell$, soit un temps de parcours



$$t_{\text{max}} = \frac{n}{c}\,\frac{\mathrm{L}}{\sin i_\ell} = \frac{n^2\,\mathrm{L}}{n_1\,c}$$

Donc
$$\boxed{\delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}} = \frac{n\,\mathrm{L}}{c}\left(\frac{n}{n_1} - 1\right)}$$

5 L'égalité de l'énoncé se réécrit

$$\frac{n}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{1-2\Delta}}$$

En supposant que $\Delta \ll 1$ on peut réaliser un développement limité de l'expression précédente à l'ordre 1 en Δ

$$\frac{n}{n_1} = 1 + \Delta + \mathrm{o}(\Delta)$$

Il suffit alors de reprendre l'expression de δt pour obtenir

$$\boxed{\delta t \approx \frac{n\,\mathrm{L}\,\Delta}{c}}$$