Mines Maths 2 PC 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jean Louet (ENS Cachan) ; il a été relu par Guillaume Dujardin (chercheur à l'INRIA) et Gilbert Monna (professeur en CPGE).

L'épreuve se compose de trois parties.

- Dans la première, les thèmes abordés sont la réduction d'endomorphismes, l'algèbre bilinéaire et les équations différentielles linéaires. On y étudie la diagonalisation d'une matrice de la forme $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$, A et B étant symétriques définies positives. Le raisonnement, bien que relativement classique, est assez fin et nécessite d'avoir bien assimilé le cours sur les formes bilinéaires ; les étapes sont bien détaillées par l'énoncé. On applique ensuite cette réduction à la résolution du système différentiel $\mathrm{A}x'' = -\mathrm{K}x$.
- La deuxième partie, totalement indépendante de la première, est consacrée à l'analyse et au calcul intégral. Il s'agit de montrer que toute fonction h de classe $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodique peut être approchée uniformément par une fonction définie par une intégrale. Il faut notamment savoir bien manipuler les expressions proposées (ici via un changement de variable exploitant la périodicité, l'inégalité triangulaire, la relation de Chasles et l'inégalité des accroissements finis) pour établir l'inégalité de la question 10, la plus technique de cette partie.
- L'objectif de la troisième partie est de montrer, à partir des résultats de la précédente, le théorème suivant, dit ergodique, dans lequel θ est une fonction donnée $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$:

  > Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et 2π- périodique par rapport à ses deux variables, alors
  > $$\lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{T}} \int_0^{\mathrm{T}} f \circ \theta(t)\,\mathrm{d}t = (2\pi)^{-2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta_1,\theta_2)\,\mathrm{d}\theta_1\,\mathrm{d}\theta_2$$

  On montre d'abord ce résultat lorsque f est un polynôme trigonométrique ; ce n'est pas difficile intuitivement, mais la rédaction soigneuse est un peu lourde. On procède ensuite par approximation en utilisant les fonctions construites dans la deuxième partie. La démonstration s'effectue « à la main » en utilisant la définition de la limite, et il faut là encore être attentif (et astucieux) pour effectuer les majorations nécessaires.

  La dernière question propose d'étudier le comportement global d'une solution du système différentiel étudié à la fin de la première partie, dans le cas de la dimension 2. On démontre par l'absurde et en utilisant le théorème ergodique que, pour une certaine base (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$, la solution rencontre tout ouvert non vide inclus dans l'ensemble $\{ue_1 + ve_2 \;\mid\; u, v \in \,]-1\,;1\,[\}$.

C'est donc un très beau problème, qui aborde des aspects variés du programme (algèbre bilinéaire, équations différentielles et calcul intégral). Les raisonnements sont bien détaillés par l'énoncé, mais plusieurs questions sont assez techniques et il faut être bien entraîné au calcul intégral et à l'analyse à une variable pour espérer les résoudre entièrement.

Indications

1 Montrer que le noyau de l'application $x \mapsto \mathrm{A}x$ est réduit à $\{0\}$.

2 Poser $z = \mathrm{A}^{-1}y$ et exploiter la symétrie de A.

3 Montrer que les deux membres de l'égalité cherchée valent $\langle \mathrm{K}x; y\rangle$.

4 Utiliser la question 3 pour montrer que $\mathrm{A}^{-1}\mathrm{K}$ est symétrique pour le produit scalaire $(\,;\,)_{\mathrm{A}}$, déduire qu'elle est diagonalisable et calculer $(\mathrm{E}(e_i); e_i)_{\mathrm{A}}$ de deux façons pour trouver le signe de ses valeurs propres.

5 Si x est une solution de (**1**), écrire $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t) e_i$ et résoudre l'équation différentielle scalaire vérifiée par chaque x_i.

6 Développer le produit scalaire $\langle \mathrm{A}x(t), y(t)\rangle$ à l'aide des coordonnées de $x(t)$, $y(t)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et des coefficients de la matrice A, puis dériver.

7 Montrer que la dérivée de cette fonction est nulle en se servant de la question précédente et de la symétrie des matrices A et K.

8 Pour calculer l'intégrale, poser $x = \cos t$. Pour l'inégalité, remarquer que

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \sin t \,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \mathrm{d}t$$

et
$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \mathrm{d}t$$

9 Montrer que, pour tout $t \in [\,\varepsilon\,; 2\pi - \varepsilon\,]$

$$\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^k \leqslant \gamma^k$$

où $\gamma \in [\,0\,; 1\,[$ (et ne dépend pas de t).

10 Remarquer que comme l'intégrale de R_k vaut 1, la différence cherchée vaut

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{R}_k(t_1)\,(h(u-t_1) - h(u))\,\mathrm{d}t_1$$

et majorer l'intégrale de cette fonction sur les intervalles $[\,0\,;\varepsilon\,]$, $[\,2\pi-\varepsilon\,; 2\pi\,]$ (en utilisant l'inégalité des accroissements finis) et $[\,\varepsilon\,; 2\pi-\varepsilon\,]$ (via la question 8).

11 Prendre $c_i = \sqrt{a_i^2 + b_i^2}$.

12 Utiliser la périodicité de f par rapport à ses deux variables pour se ramener au compact $[\,0\,; 2\pi\,]^2$, sur lequel f est continue.

13 Dans le cas où $(j,l) \neq (0,0)$, montrer que les deux membres de (**4**) sont nuls en écrivant $f \circ \theta$ sous la forme $f \circ \theta(t) = e^{i\psi} e^{i\omega t}$ puis en calculant directement son intégrale sur $[\,0\,;\mathrm{T}\,]$.

14 Remarquer que $\big((1+\cos(x-\theta))/2\big)^k$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des quantités $(e^{px} e^{q\theta})_{p,q \leqslant |k|}$,

15 Introduire la fonction

$$g_k(u,v) = \int_0^{2\pi} \mathrm{R}_k(u-\theta_1) f(\theta_1, v)\,\mathrm{d}\theta_1$$

et majorer séparément $f - g_k$ et $g_k - f_k$.

16 Écrire la différence à majorer comme somme des trois termes

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} (f\circ\theta - f_k\circ\theta) + \left(\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}} f_k\circ\theta - (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_k\right) + (2\pi)^{-2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(f_k - f)$$

Se donner alors $\varepsilon > 0$ fixé et utiliser la question 15 pour majorer le premier et le troisième terme par $\mathrm{M}\varepsilon$; puis prendre T assez grand pour que le deuxième terme soit majoré par ε.

17 Exploiter l'indication de l'énoncé en notant que Ω contient un ensemble de la forme

$$\mathrm{U} = \{ue_1 + ve_2 \quad | \quad (u,v) \in \,]\cos b\,;\cos a\,[\, \times \,]\cos d\,;\cos c\,[\}$$

et remarquer que si $(\cos\theta_1, \cos\theta_2) \notin \mathrm{U}$ alors $\phi_{a,b}(\theta_1)$ ou $\phi_{c,d}(\theta_2)$ est nul (donc leur produit est nul).

I. Oscillations d'un certain système linéaire

1 Soit $y \in \mathbb{R}^n$ appartenant au noyau de A. Ainsi $\mathrm{A}y = 0$ donc $\langle \mathrm{A}y ; y\rangle = 0$. Or, par hypothèse sur A, $\langle \mathrm{A}x ; x\rangle > 0$ pour tout vecteur x non nul ; on en déduit que y est nul. Le noyau de $x \mapsto \mathrm{A}x$ est donc réduit à $\{0\}$; cette application est injective. Comme il s'agit d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, elle est bijective, et c'est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à la matrice A. Ainsi,

$$\boxed{\text{A est inversible.}}$$

2 Soient x, $y \in \mathbb{R}^n$. D'après la question 1, A est inversible, notons $z = \mathrm{A}^{-1}y$; alors

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{A}^{-1}x ; y\rangle &= \langle \mathrm{A}^{-1}x ; \mathrm{A}z\rangle \\ &= \langle \mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1}x) ; z\rangle \qquad \text{car A est symétrique}\end{aligned}$$

soit $$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad \langle \mathrm{A}^{-1}x ; y\rangle = \langle x ; \mathrm{A}^{-1}y\rangle}$$

L'endomorphisme $x \mapsto \mathrm{A}^{-1}x$ est donc symétrique pour le produit scalaire usuel, donc sa matrice dans toute base orthonormale pour ce produit scalaire est symétrique ; c'est le cas pour la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et la matrice correspondante est alors A^{-1}. On conclut :

$$\boxed{\text{La matrice } \mathrm{A}^{-1} \text{ est symétrique.}}$$

3 Montrons que l'application $(\,;\,)_\mathrm{A}$, qui est à valeurs réelles, est un produit scalaire :

- elle est linéaire à gauche : si x, y, $z \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ on a
$$\langle \mathrm{A}(\lambda x + \mu y) ; z\rangle = \langle \lambda \mathrm{A}x + \mu \mathrm{A}y ; z\rangle = \lambda\langle \mathrm{A}x ; z\rangle + \mu\langle \mathrm{A}y ; z\rangle$$
- elle est symétrique : si x, $y \in \mathbb{R}^n$, on a par symétrie de la matrice A
$$(x ; y)_\mathrm{A} = \langle \mathrm{A}x ; y\rangle = \langle \mathrm{A}y ; x\rangle = (y ; x)_\mathrm{A}$$
Étant symétrique et, d'après le point précédent, linéaire à gauche, $(\,;\,)_\mathrm{A}$ est une forme bilinéaire symétrique ;
- elle est définie positive : si $x \in \mathbb{R}^n$ est non nul, $(x ; x)_\mathrm{A} = \langle \mathrm{A}x ; x\rangle > 0$ par hypothèse sur A, et si x est nul, ce terme est nul ; ainsi, $(x ; x)_\mathrm{A} \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$.

On conclut que $$\boxed{(\,;\,)_\mathrm{A} \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n.}$$

On note $\mathrm{E} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{K}$, de sorte que pour x, $y \in \mathbb{R}^n$

$$(\mathrm{E}(x) ; y)_\mathrm{A} = \langle \mathrm{A}\mathrm{E}(x) ; y\rangle = \langle \mathrm{A}(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{K}x) ; y\rangle = \langle \mathrm{K}x ; y\rangle$$

et
$$\begin{aligned}(x ; \mathrm{E}(y))_\mathrm{A} &= \langle \mathrm{A}x ; \mathrm{A}^{-1}\mathrm{K}y\rangle \\ &= \langle x ; \mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{K}y\rangle \qquad \text{par symétrie de A} \\ &= \langle x ; \mathrm{K}y\rangle \\ (x ; \mathrm{E}(y))_\mathrm{A} &= \langle \mathrm{K}x ; y\rangle \qquad \text{par symétrie de K}\end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{E}(x) ; y)_\mathrm{A} = (x ; \mathrm{E}(y))_\mathrm{A}}$$