# Centrale Maths 2 PC 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Romain Cosset (Professeur agrégé) ; il a été relu par Christophe Fiszka (ENS Cachan) et Laetitia Borel-Mathurin (Professeur en CPGE).

Le but de l'épreuve est de trouver une rotation permettant de transformer des vecteurs en une approximation d'autres vecteurs. Pour cela, on étudie le groupe des matrices orthogonales $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et en particulier le sous-groupe $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$. Le sujet se compose en 5 parties.

- La première comprend à la fois des questions de cours et des petits calculs. La question I.A.3 sera très utilisée dans la suite de l'épreuve.
- La deuxième partie est la plus longue (plus d'un tiers du sujet). Elle a pour but de définir un produit scalaire et de montrer que le problème revient à chercher une matrice W dans $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ maximisant $\langle \mathrm{W}, \mathrm{A}\rangle_{\mathrm{F}}$ pour une certaine matrice A. De plus, les sous-parties D et E résolvent le problème dans des cas particuliers.
- La troisième partie est plus théorique : elle démontre un résultat de décomposition matricielle admis dans la partie précédente.
- La quatrième permet de résoudre le problème dans le cas général. La deuxième sous-partie reprend le même raisonnement que celui de la partie II.
- Finalement, la dernière partie diffère des précédentes par les outils mis en œuvre : on y étudie des suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ et on utilise des propriétés de topologie. La dernière question, qui nécessite une vue d'ensemble du sujet, a pour but d'obtenir une méthode efficace pour résoudre le problème initial.

Il est conseillé de traiter ce sujet dans l'ordre car des raisonnements se ressemblent. Par ailleurs, on utilise plusieurs fois (questions II.D.2, III.A.3 ou V.B.3) des résultats intermédiaires établis au cours des preuves des questions précédentes.

L'utilisation par l'énoncé de la lettre W peut conduire à des erreurs : suivant les questions, W désigne une matrice fixée de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ ou de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$, ou une matrice quelconque de l'un de ces ensembles. De même, il fallait bien préciser sur quel ensemble on maximise les fonctions $\langle \cdot, \mathrm{A}\rangle_{\mathrm{F}}$.

## Indications

### Partie I

I.A.3 Utiliser le fait que les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée.

### Partie II

II.A.1 Appliquer la formule $\mathrm{Tr}\,({}^t\mathrm{A}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{A})$.

II.A.2 Revenir à la définition de la trace comme somme des termes diagonaux de la matrice.

II.A.4 Utiliser la formule $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$.

II.B.1 Appliquer la question II.A.3.

II.B.3 Montrer que $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et utiliser la question précédente.

II.C.1 Que peut-on dire d'une fonction continue sur un compact ? Utiliser le résultat de la question II.B.3 pour conclure.

II.C.3 Revenir à la définition du produit scalaire.

II.D.1 Écrire $\langle \mathrm{W}', \Delta\rangle_{\mathrm{F}}$ en fonction des coefficients des matrices $\mathrm{W}'$ et $\Delta$. Majorer cette quantité et chercher les conditions d'égalité.

II.E.1 Utiliser la question II.D.1.

II.E.2 Reprendre la preuve de la question précédente et utiliser la question II.D.2.

### Partie III

III.A.2 Pour montrer que les valeurs propres de B sont positives, calculer ${}^t\mathrm{V}\,\mathrm{BV}$ pour un vecteur propre V de B.

III.A.3 Appliquer le théorème du rang aux endomorphismes canoniquement associés aux matrices M et B.

### Partie IV

IV.A.1 Exploiter la question I.A.3.

IV.A.5 Utiliser les questions IV.A.3 et IV.A.4 avec F l'espace vectoriel engendré par un vecteur propre associé à la valeur propre $-1$ de $\mathrm{W} \in \mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$.

IV.A.6 Appliquer la question précédente et la formule $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{AB}) = \mathrm{Tr}\,(\mathrm{BA})$ puis la question IV.A.1.

### Partie V

V.B.1 Prendre un vecteur du noyau de $3\,{}^t\mathrm{Z}\,\mathrm{Z} + \mathrm{I}_n$ et utiliser la question III.A.1 pour avoir des conditions sur les valeurs propres de ${}^t\mathrm{Z}\,\mathrm{Z}$.

V.B.3 Exprimer les coefficients diagonaux de $\mathrm{D}_{k+1}$ en fonction de ceux de $\mathrm{D}_k$ et appliquer les résultats de la partie V.A.

V.C.1 Étudier l'application $\mathrm{Y} \mapsto \det(\mathrm{Y}\,{}^t\mathrm{X})$ au voisinage de $\mathrm{Y}_0$.

V.C.2 Écrire $\mathrm{Y}\,{}^t\mathrm{X}$ sous la forme $\mathrm{Q}\Delta\,{}^t\mathrm{P}$ à l'aide de la partie III. Caractériser les matrices minimisant la quantité $\sum_{i=1}^{m} \|\mathrm{WX}_i - \mathrm{Y}_i\|_2^2$ en terme de Q et P à l'aide des questions II.C.3 et II.E.1. Utiliser la question V.B.3 pour connaître les limites possibles des suites de $\mathcal{F}$.

# I. Questions préliminaires

**I.A.1** Un élément M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient au groupe orthogonal $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M} = \mathrm{I}_n$. En prenant le déterminant de cette relation, on obtient

$$1 = \det({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M}) = \det({}^t\mathrm{M})\det(\mathrm{M}) = \det(\mathrm{M})^2$$

Ainsi les matrices orthogonales sont de déterminant $\pm 1$ et donc

Les matrices de $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ sont de déterminant 1 et celles de $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ de déterminant $-1$.

> Par définition, les rotations étant des matrices orthogonales de déterminant 1, le groupe $\mathcal{O}_n^+(\mathbb{R})$ est l'ensemble des rotations.

**I.A.2** Si $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ était un sous-groupe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ alors il devrait contenir $\mathrm{I}_n$, l'élément neutre de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Or l'identité a pour déterminant 1 et n'appartient pas à $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$. On en déduit que

L'ensemble $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ n'est pas un groupe.

**I.A.3** Les colonnes d'une matrice orthogonale forment une base orthonormée pour le produit scalaire $\langle x, y\rangle = {}^t x\, y$. La $j^{\text{e}}$ colonne de M est donc de norme 1 c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}^2 = 1$$

Comme les $\mathrm{M}_{i,j}^2$ sont des réels positifs de somme 1, ils sont tous inférieurs à 1.

Les valeurs absolues des coefficients de M sont inférieures ou égales à 1.

> Redémontrons que les colonnes de M forment une base orthonormée. Soit $e_i$ le vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont la $i^{\text{e}}$ coordonnée est 1 et dont les autres sont nulles. Le vecteur $\mathrm{M}e_i$ est alors la $i^{\text{e}}$ colonne de M notée $\mathrm{M}_i$. On a donc
>
> $$\langle \mathrm{M}_i, \mathrm{M}_j\rangle = {}^t e_i\, {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{M}e_j = {}^t e_i\, e_j = \delta_{i,j}$$
>
> où $\delta_{i,j}$ est égal à 1 si et seulement si $i = j$ et est égal à 0 sinon.
>
> Si M est une matrice orthogonale alors ${}^t\mathrm{M}$ l'est aussi. En appliquant le résultat précédent, on obtient que les lignes de M forment aussi une base orthonormée.

**I.B.1** La forme trigonométrique d'un nombre complexe $z$ est $z = |z|\exp(\mathrm{i}\alpha)$ où $\alpha$ appartient à $]-\pi\,;\pi\,]$. On a

$$\alpha_1 = 2 \qquad \alpha_2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}} \qquad \beta_1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} \qquad \beta_2 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$$

Remplaçons ces valeurs dans la fonction $f$ et simplifions la : pour $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \left|\beta_1 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\alpha_1\right|^2 + \left|\beta_2 - \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\alpha_2\right|^2 \\ &= \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\theta}\right|^2 + \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}\right|^2 \\ &= \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\left(1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\right)\right|^2 + \left|\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\left(1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta+\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{3}\right)}\right)\right|^2 \\ f(\theta) &= \left|1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)}\right|^2 + \left|1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\left(\theta-\frac{5\pi}{12}\right)}\right|^2 \end{aligned}$$

Les deux modules ci-dessus sont donc du type $\left|1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha}\right|^2$. En utilisant la formule $|z|^2 = \mathrm{Re}\,(z)^2 + \mathrm{Im}\,(z)^2$, on obtient ainsi

$$\begin{aligned} \left|1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha}\right|^2 &= (1 - 2\cos(\alpha))^2 + (2\sin(\alpha))^2 \\ &= 1 + 4\left(\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2\right) - 4\cos(\alpha) \\ \left|1 - 2\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\alpha}\right|^2 &= 5 - 4\cos(\alpha) \end{aligned}$$

D'où
$$f(\theta) = 10 - 4\left(\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\theta - \frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

En utilisant la formule $\cos(a) + \cos(b) = 2\cos((a-b)/2)\cos((a+b)/2)$, il vient

$$\boxed{f(\theta) = 10 - 8\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\cos\left(\theta - \frac{3\pi}{8}\right)}$$

**I.B.2** D'après la question précédente, la fonction $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée :

$$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad f'(\theta) = 8\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\sin\left(\theta - \frac{3\pi}{8}\right)$$

La dérivée de $f$ s'annule quand $\sin(\theta - 3\pi/8)$ est nul, c'est-à-dire pour $\theta - 3\pi/8$ congru à 0 modulo $\pi$. D'après la $2\pi$-périodicité de $f$, on peut restreindre l'étude à $]-\pi\,;\pi]$. Dans cet intervalle, la fonction $f$ peut admettre des maxima locaux en deux valeurs de $\theta$ :

$$\theta = \frac{3\pi}{8} \qquad \text{et} \qquad \theta = \frac{3\pi}{8} - \pi = -\frac{5\pi}{8}$$

Pour ces deux valeurs, on a

$$f\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 10 - 8\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\cos(0) = 10 - 8\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

et
$$f\left(-\frac{5\pi}{8}\right) = 10 - 8\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)\cos(-\pi) = 10 + 8\cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$$

Le nombre $\cos(\pi/24)$ étant positif, on vérifie que $f(3\pi/8)$ est un majorant de $f$ car la fonction cosinus est à valeurs dans $[-1\,;1]$. On en déduit que

$$\boxed{\text{Les valeurs de } \theta \text{ minimisant } f(\theta) \text{ sont les } 3\pi/8 + 2k\pi \text{ pour } k \in \mathbb{Z}.}$$