

X Physique MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Tom Morel (ENS Cachan) et Sébastien Dusuel (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur l'imagerie par résonance magnétique (IRM). Elle est organisée en quatre parties indépendantes.

- Dans la première partie, on envisage la production d'un champ magnétique par un solénoïde infini épais, puis celle d'un champ quasi uniforme à l'aide de deux bobines coaxiales.
- La suppression de l'effet Joule, mis en évidence dans la première partie, justifie l'étude d'un matériau supraconducteur effectuée dans la seconde partie.
- Dans la troisième partie, on caractérise le comportement à l'équilibre thermique d'une assemblée de moments magnétiques protoniques dans un champ extérieur.
- Enfin, la quatrième partie décrit la séquence d'écho de spin utilisée dans le cadre de l'IRM.

L'épreuve fait appel à de nombreuses notions relatives à l'électromagnétisme des première et seconde années : considérations d'invariance et de symétrie, utilisation du théorème d'Ampère, de la loi d'Ohm locale, calculs relatifs à la puissance dissipée par effet Joule, aux ondes planes, au vecteur de Poynting, manipulation des équations de Maxwell, notion de moment magnétique et expressions de l'énergie potentielle et du couple subi dans un champ magnétique extérieur. À ce titre, elle peut servir de problème de révision en électromagnétisme, quel que soit le concours préparé. En effet, l'ensemble forme un problème très directif, dont la difficulté est raisonnable pour une épreuve qui inaugure la fusion des écrits des concours de l'X et des ENS. Parmi les points délicats, notons l'utilisation, assez courante dans ce type de problème, de la loi de Boltzmann en tant que densité de probabilité. Enfin, signalons que, comme l'année dernière, la calculatrice n'était pas autorisée pour cette épreuve. Les applications numériques sont dans ce cas valorisées dans les barèmes et ce n'est pas une perte de temps de s'y intéresser.

INDICATIONS

Première partie

- I.1 Le champ $\vec{j}(M)$ est perpendiculaire aux plans d'antisymétrie des courants.
- I.3 Supposer la nullité du champ à l'extérieur du solénoïde et appliquer le théorème d'Ampère à un contour appuyé sur l'axe et refermé à l'extérieur.
- I.4 La puissance volumique dissipée par effet Joule est $p_v = \vec{j} \cdot \vec{E}$.
- I.7 La puissance thermique perdue au contact de l'atmosphère est proportionnelle à la surface de contact.
- I.9 Envisager l'approche progressive de deux bobines identiques et coaxiales.

Deuxième partie

- II.5 Le champ magnétique est continu en $x = 0$ et ne peut diverger quand $x \rightarrow +\infty$.
- II.6 Utiliser l'équation de Maxwell-Ampère.

Troisième partie

- III.1 L'énergie potentielle dans le champ extérieur est $U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}_0$.
- III.3 L'angle solide sous lequel est vue une surface dS à la distance r de O est

$$d^2\Omega = \frac{\vec{dS} \cdot \vec{e}_r}{r^2}$$

- III.6 On peut justifier au préalable que $\langle \vec{\mu} \rangle = \langle \mu_z \rangle \vec{e}_z$.
- III.8 Utiliser le théorème du moment cinétique et la relation de composition des dérivées temporelles

$$\left[\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}} = \left[\frac{d\vec{\mu}}{dt} \right]_{/\mathcal{R}_0} + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{\mu}$$

entre un référentiel absolu \mathcal{R} et un référentiel \mathcal{R}_0 tournant dans \mathcal{R} à la vitesse angulaire $\vec{\omega}_0$.

Quatrième partie

- IV.1 Reprendre la question III.8 pour chaque $\vec{\mu}_i$.
- IV.2 Utiliser le résultat de la question IV.1 et la relation de composition des dérivées temporelles.
- IV.3 À l'aide de la question précédente, identifier le vecteur rotation $\vec{\Omega}'$ de \vec{M} dans \mathcal{R}' et considérer son inclinaison θ par rapport à \vec{e}_z .
- IV.4 Considérer $\vec{\Omega}'$ avec $\omega = \omega_0$.
- IV.8 Considérer $\vec{\Omega}'$ avec $\omega \neq \omega_0$ et l'angle dont a tourné \vec{M} dans le plan (XOY) au bout d'une durée t .
- IV.9 Justifier graphiquement que dans tous les cas, \vec{M} a tourné d'un angle total égal à π , dans le plan (XOY) entre $t = \tau$ et $t = 2T_E$.
- IV.10 Initialement, $M_X(\tau) = M_Z(\tau) = 0$ et $M_Y(\tau) = M_0$.
- IV.11 Il est nécessaire que la séquence d'écho de spin ait lieu avant un avancement significatif du processus de relaxation.

IMAGERIE PAR RÉSONANCE MAGNÉTIQUE

I. PRODUCTION DE CHAMPS MAGNÉTIQUES INTENSES ET HOMOGENES

I.1 Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ contenant l'axe (Oz) est un plan d'antisymétrie de la distribution de courant, alors le vecteur $\vec{j}(M)$ est nécessairement perpendiculaire au plan (\vec{e}_r, \vec{e}_z) . Ainsi, **les composantes j_r et j_z sont nulles** et on écrit

$$\vec{j}(M) = j_\theta \vec{e}_\theta$$

Par ailleurs, considérons deux points M et M' , images l'un de l'autre par une rotation d'axe (Oz) avec

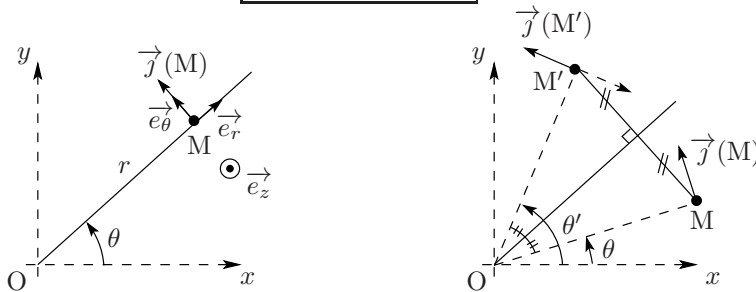
$$\vec{j}(M) = j_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{j}(M') = j_\theta(r, \theta', z) \vec{e}_\theta$$

Ces points sont disposés symétriquement par rapport au plan bissecteur correspondant à l'angle $(\theta + \theta')/2$. Ce plan contient l'axe (Oz) , donc $\vec{j}(M)$ et $\vec{j}(M')$ sont antisymétriques. Comme on le voit sur le schéma ci-après, cela impose

$$j_\theta(r, \theta, z) = j_\theta(r, \theta', z)$$

et que **la composante j_θ est indépendante de θ** . On résume ces conditions en

$$\vec{j}(M) = j_\theta(r, z) \vec{e}_\theta$$



Rappelons que l'antisymétrie d'un vecteur est l'opposé de son symétrique et qu'en un point d'un plan de symétrie (respectivement antisymétrie), un vecteur est nécessairement porté par le plan (resp. orthogonal au plan) pour être confondu avec son symétrique (resp. antisymétrique).

I.2 Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ étant plan d'antisymétrie de la distribution de courant, le champ $\vec{B}(M)$ lui appartient et s'écrit a priori $\vec{B}(M) = B_r \vec{e}_r + B_z \vec{e}_z$. Par ailleurs, la distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ , donc les composantes B_r et B_z ne dépendent pas de θ . Finalement,

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

Rappelons aussi que les seules symétries qui comptent en magnétostatique sont celles de la distribution de courant et que les résultats de la magnétostatique restent valables dans l'approximation des régimes quasi stationnaires.

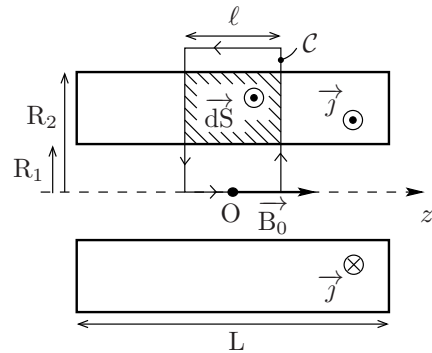
I.3 Un tel solénoïde peut être vu comme la superposition de solénoïdes minces de grande longueur L , devant leurs rayons compris entre R_1 et R_2 . Ainsi, en négligeant les effets de bords pour chaque solénoïde et donc pour l'ensemble par superposition, on sait que **le champ magnétique est uniforme et porté par \vec{e}_z à l'intérieur et nul à l'extérieur.**

Appliquons le théorème d'Ampère en régime stationnaire au contour \mathcal{C} rectangulaire dans un plan méridien, de longueur $\ell \ll L$, passant par le centre et se refermant à l'extérieur :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enlacée}}$$

La circulation s'écrit $B_0 \times \ell$, car le champ est nul à l'extérieur et perpendiculaire au contour sur les deux côtés radiaux. L'intensité enlacée est $I_{\text{enlacée}} = j_{\theta} \times (R_2 - R_1) \ell$, puisque j_{θ} est uniforme, donc

$$\vec{B}_0 = \mu_0 j_{\theta} (R_2 - R_1) \vec{e}_z$$



I.4 La loi d'Ohm locale s'écrit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ et la puissance volumique dissipée par effet Joule est

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\sigma}$$

Comme p_v est uniforme, la puissance dissipée dans le solénoïde est

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = p_v \times \pi(R_2^2 - R_1^2) L$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\pi j_{\theta}^2 (R_2^2 - R_1^2) L}{\sigma}$$

I.5 En remplaçant $j_{\theta} = B_0 / \mu_0 (R_2 - R_1)$ dans l'expression établie à la question précédente, il vient

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\pi B_0^2 L}{\mu_0^2 \sigma} \times \frac{R_2 + R_1}{R_2 - R_1}$$

À B_0 , L et R_2 fixés, $\mathcal{P}_{\text{Joule}}$ est une fonction croissante de R_1 sur $[0; R_2[$, donc

Il faut prendre $R_1 \ll R_2$ pour minimiser la puissance dissipée.

| Avoir R_1 nul serait physiquement impossible et sans intérêt pratique.

I.6 La borne inférieure de la puissance dissipée atteinte pour $R_1 \ll R_2$ est

$$\mathcal{P}_{\text{Joule}} = \frac{\pi B_0^2 L}{\mu_0^2 \sigma} = 5.10^4 \text{ W}$$

Bien que le cuivre soit un très bon conducteur, cette puissance dissipée est importante comparée à celle d'un radiateur électrique ordinaire, qui est de l'ordre de 10^3 W.