# Mines Physique 1 MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Stéphane Ravier (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (ENS Ulm) et Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE).

Ce sujet s'intéresse à deux procédés de transport qui s'appuient sur la gravitation et les forces d'inertie, pour réduire les coûts ou les temps de parcours.

- Un projet de métro circulaire, creusé à l'intérieur de la Terre, fait l'objet de la première partie. Après une rapide étude d'un tunnel rectiligne reliant directement deux points de la surface, on aborde un tunnel circulaire (creusé à une profondeur correspondant à la moitié du rayon terrestre), unique, relié à différents canaux rectilignes qui le connectent à la surface. Si les temps de parcours obtenus sont extrêmement intéressants, puisque le dispositif peut relier deux points quelconques de la surface de la Terre en moins d'une heure, il va sans dire que les difficultés techniques d'un tel dispositif sont colossales voire insurmontables ; cependant, seul le problème des déblais est évoqué.
- Dans la seconde partie, on s'intéresse à un dispositif imaginé dans les années 60 et popularisé par A. Clarke, auteur de science-fiction : l'ascenseur orbital. Il s'agit d'utiliser la rotation de la Terre pour stabiliser un long câble, solidement arrimé à l'équateur. Une fois ce câble en place, une cabine, analogue à une cabine d'ascenseur, permet de « monter jusqu'à l'orbite géostationnaire » pour un coût très réduit. Si ce projet a des défenseurs et apparaît plus réaliste que le premier, il reste d'importantes difficultés, aujourd'hui non entièrement résolues, à la mise en œuvre effective d'un tel dispositif.

Ce sujet, qui traite exclusivement de mécanique, était en grande partie commun avec celui de la filière PSI. Il n'est pas particulièrement long ni difficile. Toutefois, on peut regretter qu'il présente des inexactitudes ou des coquilles qui ont pu être déstabilisantes le jour du concours.

# Indications

## Partie I

3 Utiliser une méthode énergétique.

4 Traduire la conservation de l'énergie mécanique.

6 La vitesse est continue en $H_1$.

9 L'énoncé n'est pas clair sur $\rho$ : il s'agit simplement de la masse volumique (ni de la densité, sans dimension ; ni de la densité volumique de masse, dénomination pour le moins « originale »...).

## Partie II

12 Faire un bilan des forces s'exerçant sur un tronçon élémentaire de câble en équilibre dans le référentiel terrestre, qui est *non galiléen*.

13 Ne pas tenir compte du renvoi sur la question 8 (scorie d'une version précédente de l'énoncé ?). Le module d'Young $\varepsilon$ caractérise la rigidité d'un matériau (hors-programme). La tension T peut être liée à $\varepsilon$ par : $\mathrm{T} = \varepsilon\,\mathrm{S}\,\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$ où $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}$ est la variation relative de longueur du câble.

14 Utiliser la continuité de la vitesse lors du passage de la première phase du mouvement à la seconde.

15 Comparer l'interaction gravitationnelle et la force d'inertie centrifuge.

16 La force d'inertie de Coriolis est-elle nulle ?

17 Écrire la relation de non glissement du cylindre et intégrer la relation obtenue en tenant compte des conditions initiales.

18 Exprimer la force de contact tangentielle à partir du théorème de la résultante dynamique, puis appliquer le théorème du moment cinétique barycentrique au cylindre. Attention à l'orientation de $\widehat{u_y}$.

19 Utiliser les lois de Coulomb pour lier, à la limite de glissement, les composantes normale et tangentielle de la force de contact entre le câble et la cabine.

20 Comparer la réaction tangentielle et la tension au niveau du sol $\mathrm{T_E}$.

# Transports planétaires

## I. Le métro gravitationnel

### I.A Étude préliminaire

**1** La répartition de masse, à l'origine du champ gravitationnel $\overrightarrow{g}$, est à symétrie sphérique. Ainsi, tout plan contenant O et P est plan de symétrie de cette distribution, donc le champ gravitationnel, qui est un vecteur polaire, est dans l'intersection de tous ces plans, soit $\overrightarrow{g} = g(r, \theta, \varphi)\,\widehat{u_r}$. L'invariance par rotation autour de n'importe quel diamètre implique que la norme de $\overrightarrow{g}$ ne dépend ni de $\theta$, ni de $\varphi$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{g}(\mathrm{P}) = g(r)\,\widehat{u_r}}$$

Considérons une sphère $\mathscr{S}$ de centre O et de rayon $r$ comme surface de Gauss. Le théorème de Gauss gravitationnel indique

$$\oiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = -4\pi \mathrm{G}\mathrm{M}_{\mathrm{int}}$$

où $\mathrm{M}_{\mathrm{int}}$ est la masse contenue à l'intérieur de $\mathscr{S}$. Or, $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}}$ est selon $\widehat{u_r}$ donc

$$\oiint_{\mathscr{S}} \overrightarrow{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = 4\pi r^2 g(r)$$

Par ailleurs, $$\mathrm{M}_{\mathrm{int}} = \frac{4}{3}\pi \mu_{\mathrm{T}}\, r^3$$

d'où $$4\pi r^2 g(r) = -4\pi \mathrm{G}\left(\frac{4}{3}\pi \mu_{\mathrm{T}}\, r^3\right)$$

Avec la définition de $\omega$, on en déduit

$$\boxed{g(r) = -\omega^2\, r}$$

> Rappelons que, si le théorème de Gauss est vérifié sans condition, il permet de déterminer un champ seulement si la distribution (de masse ou de charges) présente des symétries suffisantes. En effet, il faut pouvoir trouver une surface sur laquelle le calcul du flux du champ est simple.
>
> En début d'épreuve, vérifier tout ce que l'on écrit n'est pas du temps perdu. Ici, le signe du résultat est important : le champ gravitationnel est attractif en toute circonstance.

**2** La force gravitationnelle $\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{g}}}$, s'exerçant sur un point matériel de masse $m$ situé en P, est donnée par

$$\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{g}}} = m\,\overrightarrow{g}(\mathrm{P}) = -m\,\omega^2 r\,\widehat{u_r}$$

Le travail élémentaire $\delta\mathrm{W}$ s'écrit

$$\delta\mathrm{W} = \overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{g}}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\ell} = -m\,\omega^2 r\,\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}m\,\omega^2 r^2\right)$$

Ainsi, la force $\overrightarrow{\mathrm{F}_{\mathrm{g}}}$ dérive d'une énergie potentielle définie par

$$\boxed{\mathrm{E}_{\mathrm{p}}(r) = \frac{1}{2}m\,\omega^2 r^2 + \mathrm{E}_{\mathrm{p}0}}$$

Procédons à une analyse dimensionnelle avec les notations usuelles :

$$[\mathrm{E_p}] = \mathrm{M}.[\omega]^2.\mathrm{L}^2$$

Or,

$$[\mathrm{E_p}] = \mathrm{M}.\mathrm{L}^2.\mathrm{T}^{-2}$$

Ainsi,

$$\boxed{[\omega] = \mathrm{T}^{-1}}$$

> On pouvait vérifier facilement que $\omega$ est une pulsation : en effet, $g(r)$ est une accélération et $g(r) = -\omega^2\, r$, avec $r$ une longueur.

## I.B Le tunnel droit

**3** On étudie le point matériel P de masse $m$ dans le référentiel géocentrique, supposé galiléen. Compte tenu des hypothèses, puisque P n'est soumis qu'à l'attraction gravitationnelle de la Terre, P est en évolution conservative donc son énergie mécanique est constante. Puisque P est en translation rectiligne, son énergie cinétique est

$$\mathrm{E_c} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$$

On en déduit l'énergie mécanique $\mathrm{E_m}$ :

$$\mathrm{E_m} = \mathrm{E_c} + \mathrm{E_p} = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 + \mathrm{E_{p0}}$$

et ici, $r^2 = h^2 + x^2$. En dérivant cette relation par rapport au temps, il vient

$$m\,\dot{x}\,\big(\ddot{x} + \omega^2 x\big) = 0$$

Comme $\dot{x}(t)$ n'est pas toujours nul, on peut simplifier et obtenir l'équation différentielle recherchée :

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0}$$

> L'énoncé indique que l'on ne prend en compte que la force gravitationnelle ; c'est une erreur. La trajectoire rectiligne et ne passant pas par O ne peut pas être expliquée en prenant en compte cette seule force et ce, pour une raison simple : cette force est radiale, donc la seule trajectoire rectiligne compatible serait selon un rayon terrestre, ce qui n'est pas le cas. Il y a nécessairement d'autres forces pour assurer cette trajectoire. On peut penser à un système de lévitation pour éviter tout contact (analogue à ce qui est utilisé pour le *Maglev*, train japonais à lévitation magnétique). Comme elle ne travaille pas, elle n'intervient pas dans l'approche énergétique (ni dans l'équation du mouvement) ; pour autant, elle ne peut pas être oubliée.
>
> En toute rigueur, pour pouvoir simplifier par $\dot{x}$, il faudrait se limiter à des intervalles de temps où la vitesse ne s'annule pas. La vitesse s'annulant à des instants précis (de façon discrète), on montre en fait que, si l'on raccorde par continuité les différentes solutions obtenues sur chaque intervalle, on retrouve bien la solution de l'équation du mouvement, prise cette fois sur toute la durée souhaitée. C'est pour cela qu'en pratique, on peut simplifier par le terme de vitesse dans l'obtention énergétique de l'équation du mouvement.