X Maths A MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Florian Metzger (ENS Cachan) ; il a été relu par Romain Cosset (Professeur agrégé) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet traite de l'ensemble des matrices dites *normales* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, c'est-à-dire commutant avec leur adjointe (ou transconjuguée). On y montre en particulier un résultat fondamental : ce sont exactement les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui sont diagonalisables en base orthonormée. Des résultats plus fins sont obtenus pour les matrices *hermitiennes*, analogues dans le cadre hermitien des matrices symétriques réelles du cadre euclidien, dont le cours assure la diagonalisabilité en base orthonormée. Cela permet d'introduire la notion de valeurs singulières d'une matrice et d'obtenir par la suite des inégalités de traces dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- La première partie a pour objectif d'étudier certaines propriétés des matrices unitaires, normales, hermitiennes (positives). En particulier, on y établit l'équivalence entre la diagonalisabilité d'une matrice avec matrice de passage unitaire et la commutation avec sa transconjuguée.
- Dans la deuxième partie, on s'intéresse au cas des matrices hermitiennes, dont on montre qu'elles sont les matrices unitairement semblables aux matrices diagonales à coefficients réels. Une application en est l'existence et l'unicité d'une racine carrée d'une matrice hermitienne positive. Une seconde est l'existence, pour toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, d'une décomposition en valeurs singulières.
- Enfin, la troisième et dernière partie vise à démontrer diverses inégalités de trace en faisant intervenir des matrices *bistochastiques*, c'est-à-dire des matrices à coefficients réels positifs dont la somme sur chaque ligne et chaque colonne vaut 1. Le dernier résultat obtenu permet en particulier d'expliciter, pour deux matrices A et B hermitiennes, la distance entre A et l'ensemble des matrices unitairement semblables à B, pour la norme « deux » choisie, dite « de Frobenius », définie par $\|\mathrm{A}\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}\ \mathrm{A}^*\mathrm{A}}$.

Les parties ne sont pas du tout indépendantes : il faut bien avoir à l'esprit ce qui a été établi pour avancer dans le sujet. La plupart des questions sont de difficulté raisonnable, mais il faut remarquer deux points importants :

- D'abord le piège est ici que beaucoup de résultats semblent être du cours sans en être, car celui-ci ne comporte aucune mention des endomorphismes adjoints (ou matrices adjointes) dans le cadre hermitien. Il convient ainsi de s'inspirer des démonstrations déjà rencontrées dans le cas euclidien.
- Ensuite, le parti pris du sujet – traiter cette thématique de façon matricielle et avec cette définition de la matrice adjointe – complique la rédaction des questions de réductibilité à traiter par récurrence sur la dimension. Cela demande parfois de se ramener à l'endomorphisme associé à la matrice. Une meilleure définition de l'adjoint aurait été la même que dans le cadre euclidien, c'est-à-dire la propriété que l'on demande de démontrer à la première question.

Il n'en reste pas moins que ce sujet, classique pour bien des questions, permet de démontrer des résultats intéressants en testant nombre de points importants et de raisonnements clés (récurrence sur la dimension et passage à l'orthogonal, sous-espaces stables, etc.) du programme d'algèbre linéaire.

Indications

Partie I

1 Réécrire le produit scalaire en termes de produit matriciel.

2.a Utiliser à bon escient le résultat de la question 1 ainsi que l'égalité $\mathrm{E}^{\perp} = \{0\}$.

2.b La i-ième colonne de A s'exprime comme $\mathrm{A}e_i$.

3.a Montrer que pour toute $\mathrm{A} \in \mathcal{N}_n$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n \in \mathcal{N}_n$.

3.b Pour l'inclusion $\mathcal{N}_n \subset \{\mathrm{UDU}^* \mid \mathrm{U} \in \mathcal{U}_n,\ \ \mathrm{D} \in \mathcal{D}_n\}$, raisonner par récurrence forte sur la dimension en interprétant les matrices comme celles d'endomorphismes dans la base canonique, puis examiner le résultat fourni par la question 3.a en terme de stabilité d'espace propre.

4 Diagonaliser A. La trace est un invariant de similitude.

5.a Diagonaliser unitairement A et remarquer que

$$\forall (z, \omega) \in \mathbb{C}^2 \qquad z\,\omega = 0 \iff \overline{z}\,\omega = 0$$

5.b Pour l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i), encore une fois il est plus aisé de travailler avec les endomorphismes associés aux matrices. Pour l'hérédité, utiliser le critère de réduction établi à la question 3.b afin de retrouver une propriété matricielle dans l'orthogonal.

6.a Si $z_1, \ldots, z_p$ sont p complexes distincts alors le i-ième polynôme élémentaire de Lagrange associé aux z_i est

$$\mathrm{L}_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p} \frac{\mathrm{X} - z_j}{z_i - z_j}$$

Évaluer $\mathrm{L}_i(z_j)$ et en déduire, si $u_1, \ldots, u_p$ sont p autres complexes, un polynôme satisfaisant $\mathrm{P}(z_i) = u_i$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. En diagonalisant unitairement A, en déduire le résultat en remarquant que $\mathrm{P}(\mathrm{XAX}^{-1}) = \mathrm{XP(A)X}^{-1}$ pour $\mathrm{X} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

6.b Utiliser le résultat de la question 6.a. Que dire de $\mathrm{AP(A)} - \mathrm{P(A)A}$ pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

7 Pour montrer (ii) $\Longrightarrow$ (i), réduire A et considérer un polynôme vérifiant $\mathrm{P}(0) = 1$ et $\mathrm{P}(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}/\lambda_i$ pour $\lambda_i \neq 0$.

Partie II

8 Noter que $\mathcal{H}_n \subset \mathcal{N}_n$ et réduire les matrices. Exprimer les valeurs propres en termes de produit scalaire.

9 Réduire A pour l'existence. Pour l'unicité, considérer l'endomorphisme s associé à une matrice S vérifiant $\mathrm{S}^2 = \mathrm{A}$ et étudier la restriction de s aux espaces propres de l'endomorphisme de matrice A. Penser au lemme des noyaux. Enfin, si le noyau de A est non trivial, utiliser, après l'avoir montré, que pour toute matrice $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{Ker\,M} = \mathrm{Ker\,(M^*M)}$.

11 Raisonner par condition nécessaire pour montrer que les valeurs singulières de A peuvent être définies à partir de AA^*.

Partie III

12.a Exprimer $P_{i,i}$ comme un produit scalaire et utiliser le résultat de la question 1. L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit un majorant de $\|P\|$. Interpréter ensuite la relation $P^2 = P$.

12.b Travailler avec la quantité $\sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i - \text{Tr PD}$ en exploitant $\text{Tr P} = k = \sum\limits_{i=1}^{k} 1$, ainsi que le fait que pour tout $j \in [\![\, k+1\,;\, n\,]\!]$, $\lambda_{k+1} \geqslant \lambda_j$. Utiliser la réduction d'un projecteur pour trouver une matrice réalisant l'égalité.

12.c Démontrer qu'il est suffisant de se ramener au cas où l'une des matrices P_1, P_2 est la matrice de projecteur de rang k donnée par blocs $J_k = \text{Diag}\,(I_k, 0_{n-k})$.

13 Utiliser le fait que les familles des vecteurs colonnes et des vecteurs lignes d'une matrice unitaire sont orthonormées.

14.a Commencer par montrer l'existence de l'entier k donné par l'énoncé pour comprendre ce qu'il se passe. Utiliser ensuite deux fois la propriété de bistochasticité pour l'existence des entiers demandés.

14.b Débuter en raisonnant par conditions nécessaires et remarquer que la matrice demandée ne diffère de A que par quatre coefficients au plus. Puis, écrire la condition de bistochasticité. Distinguer les cas de nullité des coefficients de A' selon le signe de $A_{k,\ell} - A_{m,k}$. Exprimer ensuite la différence

$$\sum_{i,j=1}^{n} {A'}_{i,j}\alpha_i\beta_j - \sum_{i,j=1}^{n} A_{i,j}\alpha_i\beta_j$$

sous forme d'un produit de trois termes. En déduire comment la rendre positive.

Pour la seconde partie, construire par récurrence, en partant d'une matrice $A \in \mathcal{DS}_n \smallsetminus \{I_n\}$, une matrice augmentant la quantité à maximiser et ayant un nombre strictement plus grand de 1 sur la diagonale. Pour cela, les résultats établis au début de la question montrent qu'il est possible d'annuler des coefficients dans A.

15.a Décomposer A et B en valeurs singulières. Exprimer ensuite les coefficients diagonaux de UDVT et utiliser l'inégalité

$$\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \qquad |z_1 z_2| \leqslant \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{2}$$

ainsi que le résultat de la question 13.

15.c Montrer que les valeurs singulières d'une matrice de $\mathcal{H}_n^+$ sont ses valeurs propres rangées par ordre décroissant.

16 Expliquer l'existence du minimum. Puis développer $\|A - U^*BU\|^2$. Exprimer le minimum $\underset{K}{\text{Min}}\,(-f)$ pour une fonction f continue sur un compact K et réduire les matrices A, B pour exprimer plus simplement la trace à maximiser. Développer enfin la formule de la trace et se ramener au raisonnement effectué à la question 13.

I. Étude de $\mathcal{N}_n$

1 Avec la définition de l'énoncé, remarquons que

$$\mathrm{A}^* = {}^t\overline{\mathrm{A}} = \overline{{}^t\mathrm{A}}$$

En particulier, $\forall \lambda \in \mathbb{C} \qquad (\lambda\mathrm{A})^* = \overline{\lambda}\mathrm{A}^*$

De plus, on constate que si l'on identifie un vecteur $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i$ de $\mathbb{C}^n$ au vecteur colonne ${}^t(x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ (ce que l'on fera dans toute la suite), et de même pour y, alors le produit scalaire hermitien s'écrit matriciellement

$$(x \mid y) = {}^t\overline{x}\, y$$

Il découle de la commutativité des opérateurs de transposition et de conjugaison que pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$

$$(\mathrm{A}^*x \mid y) = {}^t\overline{\mathrm{A}^*x}\, y = {}^t\overline{x}\; {}^t\overline{\mathrm{A}^*}\, y = {}^t\overline{x}\; {}^t\overline{{}^t\overline{\mathrm{A}}}\, y = {}^t\overline{x}\; {}^t\left({}^t\mathrm{A}\right) y = {}^t\overline{x}\, \mathrm{A}y = (x \mid \mathrm{A}y)$$

Ainsi, $\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{C}^2 \qquad (\mathrm{A}^*x \mid y) = (x \mid \mathrm{A}y)}$

> Comme dans le cadre euclidien, on définit la notion d'endomorphisme adjoint dans un espace hermitien H. Toute forme linéaire sur H s'écrit de façon unique sous la forme $(a^* \mid \cdot)$ pour un (unique) vecteur $a^* \in \mathrm{H}$. Si $a \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, à x fixé, $y \mapsto (x \mid ay)$ est une forme linéaire, on peut donc définir pour tout x un unique $a^*(x)$ comme ci-dessus. Par unicité du vecteur, l'application $x \mapsto a^*(x)$ est bien définie et linéaire, c'est elle qu'on appelle l'*adjoint* de a.
>
> La relation d'égalité des produits scalaires montre que, dans une base orthonormée, la matrice de l'adjoint d'un endomorphisme est la transconjuguée de la matrice de l'endomorphisme d'origine dans la même base. En effet, en spécifiant $x = \varepsilon_i$ et $y = \varepsilon_j$, pour $\varepsilon = (\varepsilon_i)$ une base orthonormée de H, qui existe d'après le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, et en posant $\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\,\varepsilon}\, a$, il vient $\overline{\mathrm{A}^*{}_{i,j}} = \mathrm{A}_{j,i}$ pour tous $i, j \in [\![1\,;n]\!]$. Cette propriété peut être reformulée en terme de commutation d'opérateurs : dans une base orthonormée, la matrice de l'adjoint est l'adjointe de la matrice. Il faut prendre garde au fait que l'hypothèse d'orthonormalisation de la base est cruciale.
>
> Remarquons enfin que la relation demandée par l'énoncé est donc la propriété servant à définir l'adjoint si l'on confond une matrice A et l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$: $x \mapsto \mathrm{A}x$.

2.a Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si $\mathrm{A} \in \mathcal{U}_n$, alors par définition et d'après la question 1,

$$\forall\, (x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2 \qquad (\mathrm{A}^*\mathrm{A}x \mid y) = (\mathrm{A}x \mid \mathrm{A}y) = (x \mid y)$$

soit encore, $\forall\, (x, y) \in (\mathbb{C}^n)^2 \qquad (\mathrm{A}^*\mathrm{A}x - x \mid y) = 0$

c'est-à-dire $\forall\, x \in \mathbb{C}^n \qquad \mathrm{A}^*\mathrm{A}x - x \in (\mathbb{C}^n)^\perp = \{0\}$

Il en résulte que pour tout $x \in \mathbb{C}^n$, $\mathrm{A}^*\mathrm{A}x = x$ et par conséquent $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$. La matrice A est alors inversible d'inverse A^*. On a donc également l'égalité $\mathrm{AA}^* = \mathrm{I}_n$ d'où $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{AA}^* = \mathrm{I}_n$.