Mines Maths 2 MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Dujardin (Chercheur à l'INRIA) ; il a été relu par Baptiste Morisse (ENS Cachan) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur le calcul des variations. Le cadre d'étude est le suivant : étant donné un ensemble E de fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et suffisamment régulières, on considère une fonctionnelle $\mathrm{J} : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ où $\mathrm{J}(f)$ s'exprime comme l'intégrale sur I d'une fonction polynomiale en f et ses dérivées. Il s'agit alors d'étudier l'existence de minimums pour J et de les caractériser. Le problème, composé de 5 parties, propose la démonstration de quelques résultats dans ce sens et l'étude d'exemples.

- La première partie consiste en la diagonalisation d'une matrice réelle 4×4 de type compagnon afin de trouver les solutions sur I de l'équation différentielle
$$y^{(4)} + y^{(2)} + y = 0$$
- La deuxième partie guide la démonstration d'un lemme de du Bois-Reymond qui sera utile par la suite.
- La troisième partie propose la démonstration de la condition d'Euler-Lagrange lorsque $\mathrm{I} = [\,0\,;1\,]$ et E est l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur I dont les valeurs en 0 et en 1 sont fixées. On montre qu'un minimum éventuel de la fonctionnelle J est nécessairement solution d'une certaine équation différentielle. On étudie également deux exemples, l'un avec et l'autre sans minimum pour J.
- La quatrième partie est consacrée à l'étude des minima de
$$\mathrm{J}(f) = \int_0^{+\infty} \left(f(x)^2 - (f'(x))^2 + (f''(x))^2 \right) \mathrm{d}x$$
sur $\mathrm{E} = \{ f \in \mathscr{C}^4(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \,|\, f^2 \text{ et } f''^2 \text{ sont intégrables sur } \mathbb{R}_+ \}$. L'énoncé admet plusieurs résultats pour montrer que $\mathrm{J}(f) \geqslant 0$ et étudier ses minima sur E.
- Enfin, la cinquième partie est consacrée à la démonstration de l'inégalité de Hardy-Littlewood
$$\forall f \in \mathrm{E} \qquad \|f'\|^2 \leqslant 2\|f\| \cdot \|f''\|$$
où $\|f\| = \left(\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x \right)^{1/2}$, et à l'étude du cas d'égalité.

D'une durée et d'une difficulté raisonnables pour une épreuve de quatre heures, ce sujet d'analyse parcourt un large spectre du programme de MP, notamment les fonctions d'une variable réelle, l'intégration, les équations différentielles et même un peu d'algèbre linéaire. Elle constitue à coup sûr une excellente opportunité de s'entraîner et de vérifier son aisance avec tous ces chapitres du cours.

Indications

Partie A

1 Observer que $\mathrm{j}^3 = 1$ donc $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}$ et $1 + \mathrm{j} + \mathrm{j}^2 = 0$.

2 Commencer par calculer le polynôme caractéristique de A pour en obtenir les valeurs propres puis calculer les vecteurs propres associés.

3 Calculer l'exponentielle de A à l'aide de la base propre obtenue précédemment.

Partie B

6 Construire une fonction affine de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ envoyant $[\,x_0\,;x_1\,]$ sur $[\,-1\,;1\,]$.

7 Raisonner par l'absurde et utiliser la question précédente.

Partie C

8 Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.

10 Montrer que $(\boldsymbol{\Delta})\ :\ f_0'' = 0$.

11 Observer que pour $f \in \mathrm{E}^2_{0,1}$

$$1 = |f(1) - f(0)| = \left|\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_0^1 1^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

12 Utiliser le fait que $\mathrm{Q}'(f_0')$ est constant sur $[\,0\,;1\,]$ si f_0 est une solution de $(\boldsymbol{\Delta})$ sur $[\,0\,;1\,]$.

13 Raisonner avec $\mathrm{J}_2(\mu f)$ pour μ assez grand.

Partie D

14 Penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Intégrer par parties ff''.

17 Utiliser les résultats admis par l'énoncé et la question 16.

18 Montrer que pour tout f dans E, $\mathrm{J}(f) \geqslant 0$.

19 Utiliser également le résultat de la question 17.

Partie E

20 Traduire la positivité de $\mathrm{J}(f_\mu)$ en celle d'un polynôme de degré au plus 2 en μ^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ pour conclure en étudiant le signe de son discriminant.

21 Adapter la méthode mise en œuvre à la question précédente.

A. Préliminaire

1 Rappelons que j est une racine complexe 3ᵉ de l'unité, de sorte que

$$\mathrm{j}^3 = 1$$

Ainsi, le polynôme $\mathrm{X}^3 - 1$ est annulateur de j. En outre,

$$\mathrm{X}^3 - 1 = (\mathrm{X}-1)\left(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1\right)$$

Puisque $\mathrm{j} \neq 1$, on conclut que $\qquad \mathrm{j}^2+\mathrm{j}+1 = 0$

Remarquons que $\mathrm{j}^4 = \mathrm{j}\times\mathrm{j}^3 = \mathrm{j}$, de sorte que

$$\boxed{\mathrm{j}^4+\mathrm{j}^2+1 = \mathrm{j}+\mathrm{j}^2+1 = 0}$$

2 Calculons tout d'abord le polynôme caractéristique $\mathrm{P_A}$ de la matrice A. Ensuite, on détermine pour chaque racine de $\mathrm{P_A}$ une base du sous-espace propre correspondant. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\mathrm{P_A}(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Développons ce déterminant par rapport à la première colonne pour obtenir

$$\mathrm{P_A}(\lambda) = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \end{vmatrix}$$

Le second terme dans la somme précédente vaut 1. Par ailleurs, en développant le premier déterminant à nouveau par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2+1\right)$$

Finalement, $\mathrm{P_A} = \mathrm{X}^2(\mathrm{X}^2+1)+1 = \mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1$. D'après la question précédente, le nombre j est racine de $\mathrm{P_A}$. Puisque $\mathrm{P_A}$ est à coefficients réels, $\mathrm{j}^2 = \overline{\mathrm{j}}$ est également racine de $\mathrm{P_A}$. Par suite, le polynôme $(\mathrm{X}-\mathrm{j})(\mathrm{X}-\mathrm{j}^2) = \mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1$ divise $\mathrm{P_A}$. Par division euclidienne, on obtient

$$\mathrm{P_A} = \mathrm{X}^4+\mathrm{X}^2+1 = \left(\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1\right)\left(\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1\right)$$

Le discriminant du polynôme $\mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$ étant négatif, ce dernier admet deux racines complexes conjuguées. Ces racines sont

$$\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\mathrm{j}^2 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\mathrm{j}$$

> On retrouve ici l'exercice classique suivant : un polynôme unitaire
> $$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$$
> de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ étant donné, la matrice compagnon de ce polynôme, définie par
> $$\mathrm{C(P)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & (0) & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & (0) & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 \\ -a_0 & \dots & \dots & \dots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
> admet exactement P comme polynôme caractéristique.

La matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ admet ainsi quatre valeurs propres complexes distinctes, qui sont les racines de $\mathrm{P_A}$. Elle est donc diagonalisable. Posons

$$\lambda_1 = -\mathrm{j}^2 \quad , \quad \lambda_2 = \mathrm{j} \quad , \quad \lambda_3 = \mathrm{j}^2 \quad , \quad \lambda_4 = -\mathrm{j}$$

et déterminons un vecteur propre associé à chacune de ces valeurs propres de A. Pour $k \in \{1, \ldots, 4\}$, on cherche donc une solution non triviale du système 4×4 d'inconnues complexes x, y, z et t :

$$\begin{cases} y = \lambda_k\, x \\ z = \lambda_k\, y \\ t = \lambda_k\, z \\ -x - z = \lambda_k\, t \end{cases}$$

À l'aide des relations $z = \lambda_k^2\, x$ et $t = \lambda_k^3\, x$, la dernière ligne du système se réécrit $-x - \lambda_k^2\, x = \lambda_k^4\, x$, soit $\mathrm{P_A}(\lambda_k)\, x = 0$. Puisque $\mathrm{P_A}(\lambda_k) = 0$, le système précédent équivaut à

$$\begin{cases} y = \lambda_k\, x \\ z = \lambda_k^2\, x \\ t = \lambda_k^3\, x \end{cases}$$

de sorte qu'un vecteur propre associé à λ_k est

$$u_k = {}^t\begin{pmatrix} 1 & \lambda_k & \lambda_k^2 & \lambda_k^3 \end{pmatrix}$$

En remplissant la matrice $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_{4,4}(\mathbb{C})$ par colonne avec ces vecteurs, proposons

$$\boxed{\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\mathrm{j}^2 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & -\mathrm{j} \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Les colonnes de la matrice U sont des vecteurs propres de A pour des valeurs propres distinctes. Elles forment donc une famille libre de 4 vecteurs de $\mathbb{C}^4$, donc une base de $\mathbb{C}^4$. Par conséquent, la matrice U est inversible. De plus, en raisonnant colonne par colonne, on a $\mathrm{AU} = \mathrm{UD}$. Par suite,

$$\boxed{\mathrm{U}^{-1}\,\mathrm{A}\,\mathrm{U} = \mathrm{D} = \begin{pmatrix} -\mathrm{j}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{j} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{j}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{j} \end{pmatrix}}$$