Centrale Maths 1 MP 2011 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Marianne Chapouly (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE) et Yvon Vignaud (Professeur en CPGE).

Ce problème est consacré à l'approximation de la somme des séries de Riemann convergentes. Il s'articule en quatre parties largement indépendantes.

- Dans la première partie, on commence par étudier la nature des séries de Riemann $\sum\limits_{n\geqslant 1} n^{-\alpha}$ en fonction du réel α, puis on propose une première approximation du reste par deux encadrements successifs.
- Le procédé précédent devenant assez laborieux après plusieurs itérations, on propose dans la deuxième partie une méthode plus rapide pour obtenir un développement asymptotique du reste. On définit dans cette optique les nombres de Bernoulli, puis on utilise une formule de Taylor.
- Comme la méthode précédente ne permet aucun contrôle de l'erreur, on utilise dans la troisième partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin pour retrouver le même développement asymptotique, avec cette fois-ci une expression de l'erreur.
- Enfin, dans la dernière partie on donne une majoration de cette erreur, puis on étudie son comportement grâce aux séries de Fourier.

Le problème ne comporte pas de difficulté majeure, mais il est particulièrement long et comporte des estimations fines. Il couvre, au gré de ses étapes, une très grande partie du programme d'analyse et offre ainsi un entraînement intéressant aux épreuves de Centrale.

Indications

Partie I

I.B.1 Donner un encadrement de

$$\mathrm{R}_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$$

en utilisant un encadrement des sommes partielles de Riemann établi au cours de la question I.A.2.

Partie II

II.A.3.b Écrire le développement en série entière de $\mathrm{e}^z - 1$ puis déterminer le produit de Cauchy de cette série et de la série $\sum a_p z^p$.

II.A.3.c Montrer que la restriction à $]-1\,;1[\setminus\{0\}$ de la fonction $z \mapsto \varphi(z) - a_1 z$ est paire.

II.B.2 Erreur d'énoncé : il faut supposer $p \geqslant 2$. Sommer l'égalité

$$\mathrm{R}(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$$

de $k = n$ à $k = \mathrm{N}$, avec $\mathrm{N} \geqslant n$, puis passer à la limite lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$.

II.A.2.b Appliquer le théorème de dérivation terme à terme puis utiliser le résultat de la question II.A.3.a.

Partie III

III.A.3.a Raisonner par récurrence en traitant les quatre cas en parallèle.

III.A.3.b Utiliser le fait que $2n$ est congru à 0 ou 2 mod 4.

III.B.3 Appliquer le résultat de la question III.B.2 à la fonction f définie dans la question II.B.

Partie IV

IV.A.1 Utiliser les variations des polynômes A_n étudiées à la question III.A.3.a.

IV.A.2 Exprimer tout d'abord, pour tous n et $q \geqslant 1$, $\widetilde{\mathrm{S}}_{n,2q}(\alpha)$ en fonction de $\mathrm{S}(\alpha)$ et du reste intégral défini à la question III.B.2. Introduire ensuite pour $k \geqslant n$ la fonction

$$g_k : \begin{cases} [\,0\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad t \quad\longmapsto f^{(2q+2)}(t+k) \end{cases}$$

et séparer l'étude en deux cas, q pair, puis q impair, pour appliquer le résultat de la question IV.A.1.

IV.B.2 Erreur d'énoncé : remplacer la variable t par la variable x dans l'intégrande. Utiliser le résultat de la question III.B.1.a.

I. Étude préliminaire

I.A Convergence des séries de Riemann

I.A.1 Soit $k \in [\,a+1\,;+\infty\,[$. Pour tout x appartenant à $[\,k-1\,;k\,]$, inclus dans $[\,a\,;+\infty\,[$ car $k \geqslant a+1$, la décroissance de f assure que $f(x+1) \leqslant f(k) \leqslant f(x)$, ce qui implique, par intégration sur l'intervalle $[\,k-1\,;k\,]$,

$$\int_{k-1}^{k} f(x+1)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} f(k)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ou encore
$$\int_{k-1}^{k} f(x+1)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x$$

En effectuant le changement de variable affine $t = x+1$ dans la première intégrale, on obtient finalement

$$\boxed{\forall k \in [\,a+1\,;+\infty\,[\qquad \int_{k}^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

I.A.2 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha > 1$, la fonction $x \mapsto x^{-\alpha}$ est définie, continue et décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$. D'après la question précédente, on a, pour tout $k \in [\,2\,;+\infty\,[$,
$$\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \qquad (\mathbf{1})$$
soit, en sommant cette dernière inégalité de $k=2$ à $k=\mathrm{N}$ ($\mathrm{N} \geqslant 2$),
$$\sum_{k=2}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_{1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$
d'où
$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_{1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = 1 + \frac{1}{(1-\alpha)\mathrm{N}^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)} \qquad (\mathbf{2})$$
Ainsi, puisque $(1-\alpha)\mathrm{N}^{\alpha-1} < 0$,
$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 - \frac{1}{1-\alpha}$$
La suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha}\right)_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ est croissante majorée, par conséquent elle converge.
- Si $\alpha \leqslant 1$, on applique tout d'abord le résultat de la question précédente à la fonction $x \mapsto 1/x$ qui est continue et décroissante sur $[\,1\,;+\infty\,[$:
$$\forall\, k \in [\,1\,;+\infty\,[\qquad \frac{1}{k} \geqslant \int_{k}^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(k+1) - \ln(k)$$
En sommant l'inégalité précédente de $k=1$ à $k=\mathrm{N}$, avec $\mathrm{N} \geqslant 1$, il vient
$$\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k} \geqslant \ln(\mathrm{N}+1) \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{} +\infty$$

Ensuite, puisque $\alpha \leqslant 1$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} 1/k^\alpha \geqslant \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} 1/k$

On montre ainsi que la suite des sommes partielles $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} 1/k^\alpha\right)_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ n'est pas majorée et la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} 1/k^\alpha$ diverge.

Finalement, $\boxed{\text{La série } \displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k^{-\alpha} \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1.}$

I.A.3 Soit $\alpha > 1$. En passant à la limite quand $\mathrm{N} \to +\infty$ dans l'inégalité (**2**) de la question I.A.2, on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

En outre, puisque $\mathrm{S}(\alpha)$ est une somme de termes positifs dont le premier vaut 1,

$$\boxed{\forall \alpha > 1 \qquad 1 \leqslant \mathrm{S}(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}}$$

I.B Première étude asymptotique du reste

I.B.1 Soit $n \geqslant 2$. En sommant l'inégalité (**1**) de la question I.A.2 de $k = n$ à $k = \mathrm{N}$, avec $\mathrm{N} \geqslant n$, il vient

$$\frac{1}{(1-\alpha)(\mathrm{N}+1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(1-\alpha)\mathrm{N}^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)(n-1)^{\alpha-1}}$$

Dès lors, en passant à la limite lorsque $\mathrm{N} \to +\infty$ dans cette dernière inégalité (on rappelle que $\alpha > 1$), on obtient finalement

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$$

Ainsi, $\displaystyle 0 \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

Cherchons une domination de la quantité de droite dans cette inégalité.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} &= -\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha} + 1\right) \\
&= -\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\left(\frac{1-\alpha}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha}}\,(1 - \alpha + \mathrm{o}(1))
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Par comparaison, $\displaystyle \mathrm{R}_n(\alpha) - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$

En conclusion, $\boxed{\forall \alpha > 1 \qquad \mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)}$