Mines Maths 2 PSI 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) ; il a été relu par Baptiste Morisse (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème d'algèbre linéaire est composé de quatre parties relativement indépendantes. Il se propose d'établir la formule dite de condensation sur les déterminants et d'en explorer des applications et généralisations.

- Dans une première partie, on démontre quelques propriétés classiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la norme supérieure N, qui seront utiles pour la suite (densité des matrices inversibles, continuité du déterminant).
- Dans la deuxième partie, on établit la formule de condensation de Desnanot-Jacobi, qui fait le lien entre le déterminant d'une matrice et les déterminants de certaines matrices extraites.
- On utilise cette formule dans la troisième partie afin de montrer la validité de l'algorithme de Lewis Carroll (l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*), qui permet, sous certaines conditions, de calculer le déterminant d'une matrice de taille n en n'utilisant que des calculs de déterminants 2×2.
- Enfin, on démontre quelques propriétés anecdotiques d'un λ-déterminant défini à partir d'une altération de la formule de condensation établie précédemment.

Le sujet ne comporte pas de difficulté majeure et reste d'une longueur raisonnable. Les techniques employées sont classiques (développements de déterminants selon des lignes et des colonnes) et ne devraient pas surprendre un candidat bien préparé. D'ailleurs, la première partie est essentiellement constituée de questions de cours. De plus, les questions sont bien détaillées et comportent bon nombre d'indications. Notons quand même que la fin du problème fait appel à des récurrences doubles qu'il est assez pénible de rédiger proprement.

L'enchaînement des trois premières parties est logique et conduit à établir la validité de l'algorithme de Lewis Carroll, ce qui aurait pu constituer une fin en soi. La quatrième partie tombe un peu comme un cheveu sur la soupe et ne débouche pas sur des applications concrètes intéressantes.

Indications

I. Préliminaires

1 Il suffit de montrer que l'application N vérifie les propriétés caractéristiques d'une norme sur un espace vectoriel.

3 Penser à des matrices diagonales et simples.

4 Prouver que les applications $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}_{i,j}$ sont continues et utiliser la formule générale définissant le déterminant.

II. Formule de condensation

5 Reconnaître le développement d'un déterminant selon une ligne.

6 Appliquer le résultat précédent à une matrice M' construite à partir de M.

8 Essayer cette fois de développer le déterminant selon des colonnes.

9 Calculer les termes de la matrice $\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^*$ en utilisant les résultats des questions 5 et 6. On traitera à part les termes des première et dernière colonnes.

10 Développer $\det(\mathrm{M} \cdot \mathrm{M}^*)$ selon la première et la dernière colonnes, puis utiliser le résultat de la question 8.

11 Utiliser les résultats des question 3, 4 et 10.

III. Algorithme de Lewis Carroll

13 Combien faut-il calculer de déterminants $2{\times}2$ pour obtenir $\mathrm{A}^{(1)}$, $\mathrm{A}^{(2)}$, … ?

15 Utiliser la définition de $\mathrm{A}^{(2)}_{r,s}$ en notant que les différents termes apparaissant dans son expression sont des déterminants extraits d'une même matrice $3{\times}3$, ce qui permet d'appliquer la formule de condensation.

16 Les techniques mises en œuvre au cours de la question précédente permettent de démontrer le résultat au moyen d'une récurrence double.

IV. Le λ-déterminant

17 Établir le résultat demandé par récurrence double à l'aide de la relation (**2**).

18 Même démarche qu'à la question précédente.

I. Préliminaires

1 Afin de montrer que l'application N définit une norme sur l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, assurons-nous qu'elle est positive, qu'elle vérifie la propriété de séparation, qu'elle est homogène et enfin qu'elle est sous-additive. Soient donc M et P $\in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- **Positivité.** Pour tout couple $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a $|\mathrm{M}_{i,j}| \geqslant 0$ donc
$$\mathrm{N}(\mathrm{M}) = \operatorname*{Sup}_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} |\mathrm{M}_{i,j}| \geqslant 0$$

- **Séparation.** De plus,
$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\mathrm{M}) = 0 &\iff \mathrm{M}_{i,j} = 0 \qquad \text{pour tout } (i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2\\ &\iff \mathrm{M} = 0\end{aligned}$$

- **Homogénéité.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; pour $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a $(\lambda\,\mathrm{M})_{i,j} = \lambda\,\mathrm{M}_{i,j}$ donc
$$\begin{aligned}\mathrm{N}(\lambda\,\mathrm{M}) &= \operatorname*{Sup}_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} |\lambda\,\mathrm{M}_{i,j}| = \operatorname*{Sup}_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} |\lambda|\;|\mathrm{M}_{i,j}|\\ &= |\lambda| \operatorname*{Sup}_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} |\mathrm{M}_{i,j}|\\ \mathrm{N}(\lambda\,\mathrm{M}) &= |\lambda|\;\mathrm{N}(\mathrm{M})\end{aligned}$$

- **Sous-additivité.** Pour tout couple $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, on a
$$\begin{aligned}|(\mathrm{M}+\mathrm{P})_{i,j}| &= |\mathrm{M}_{i,j} + \mathrm{P}_{i,j}| \leqslant |\mathrm{M}_{i,j}| + |\mathrm{P}_{i,j}|\\ &\leqslant \operatorname*{Sup}_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} |\mathrm{M}_{i,j}| + \operatorname*{Sup}_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} |\mathrm{P}_{i,j}|\\ &\leqslant \mathrm{N}(\mathrm{M}) + \mathrm{N}(\mathrm{P})\end{aligned}$$
donc
$$\mathrm{N}(\mathrm{M}+\mathrm{P}) = \operatorname*{Sup}_{(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2} |(\mathrm{M}+\mathrm{P})_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{M}) + \mathrm{N}(\mathrm{P})$$

Ainsi, $\boxed{\text{L'application N définit une norme sur l'espace vectoriel } \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).}$

2 Les matrices P et Q étant inversibles, la relation $\mathrm{M} = \mathrm{PJQ}$ implique que les matrices M et J sont équivalentes. En particulier, elles ont même rang. Or, $\operatorname{rang}(\mathrm{J}) = r$ vue la définition de la matrice J. Ainsi,

$$\boxed{\text{L'entier } r \text{ est le rang de la matrice M.}}$$

> Même si la formulation de l'énoncé laissait penser que l'on attendait un résultat sans justification, le rapport de jury insiste sur la nécessité de justifier clairement que r est le rang de M.

3 Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathrm{J}_k = \mathrm{J} + \dfrac{1}{k}\,\mathrm{I}_n$.

- Déjà, J_k est une matrice diagonale de termes diagonaux $1 + \dfrac{1}{k}$ ou $\dfrac{1}{k}$, donc tous non nuls. Ceci prouve que J_k est inversible.

- De plus, $\mathrm{M} - \mathrm{PJ}_k\mathrm{Q} = \mathrm{PJQ} - \mathrm{PJ}_k\mathrm{Q} = \mathrm{P}(\mathrm{J} - \mathrm{J}_k)\mathrm{Q} = -\dfrac{1}{k}\mathrm{PQ}$

  donc $$\mathrm{N}(\mathrm{M} - \mathrm{PJ}_k\mathrm{Q}) = \frac{1}{k}\mathrm{N}(\mathrm{PQ})$$

  De ce fait, $$\lim_{k\to+\infty} \mathrm{N}(\mathrm{M} - \mathrm{PJ}_k\mathrm{Q}) = 0$$

Il existe une suite $(\mathrm{J}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que l'on ait $\mathrm{M} = \lim\limits_{k\to+\infty} \mathrm{PJ}_k\mathrm{Q}$ au sens de la norme N.

Le rapport du jury insiste sur la nécessité de montrer proprement que « si la suite (J_k) converge vers J, la suite $(\mathrm{PJ}_k\mathrm{Q})$ converge vers PJQ ».

4 Pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a avec les notations usuelles

$$\det(\mathrm{M}) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{i,\sigma(i)}$$

Soit alors $(i,j) \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]^2$ fixé. Pour tous M et $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$|\mathrm{M}_{i,j} - \mathrm{P}_{i,j}| = |(\mathrm{M} - \mathrm{P})_{i,j}| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{M} - \mathrm{P})$$

Ainsi, chaque application $\mathrm{M} \longmapsto \mathrm{M}_{i,j}$ est 1-lipschitzienne, donc continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. De ce fait, le déterminant est une somme de produits de fonctions continues, ce qui montre que

Le déterminant est une application continue de $\big(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathrm{N}\big)$ dans $\big(\mathbb{R}, |\;|\big)$.

II. Formule de condensation

5 Soit $i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$. Développons le déterminant de M selon la i^{e} ligne :

$$\begin{aligned}\det(\mathrm{M}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k}\, \mathrm{M}_{i,k} \det \big[\mathrm{M}\big]_i^k \\ &= (-1)^{i+1} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, \mathrm{M}_{i,k} \det \big[\mathrm{M}\big]_i^k\end{aligned}$$

Ainsi, $$\boxed{\forall\, i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \qquad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\, \mathrm{M}_{i,k} \det \big[\mathrm{M}\big]_i^k = (-1)^{i+1} \det(\mathrm{M})}$$

6 Soit $(i,j) \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]^2$ avec $i \neq j$. Notons alors M' la matrice obtenue à partir de M en remplaçant sa i^{e} ligne par la j^{e}. Autrement dit,

$$\forall\, k \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!] \qquad \mathrm{M}'_{i,k} = \mathrm{M}_{j,k} \quad \text{et} \quad [\mathrm{M}']_i^k = [\mathrm{M}]_i^k$$

la seconde relation étant justifiée par le fait que les lignes des matrices M et M' sont identiques hormis la i^{e}, si bien que

$$\det\,[\mathrm{M}']_i^k = \det\,[\mathrm{M}]_i^k$$