E3A Maths A PSI 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Juliette Brun-Leloup (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) et Laetitia Borel-Mathurin (Professeur en CPGE).

Il s'agit d'un sujet classique d'analyse portant sur les équations différentielles, les séries de Fourier et les calculs d'intégrales. Il est composé de quatre parties.

- Une première partie demande des applications directes du cours. On y démontre en particulier que toute fonction f de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Cette décomposition permet ensuite de résoudre une équation fonctionnelle en ramenant sa résolution à celles d'équations différentielles du second ordre à coefficients constants.
- Une deuxième partie est consacrée à des questions préliminaires au problème. Elle traite essentiellement de la résolution d'équations linéaires du second ordre à coefficients constants, de la structure de l'ensemble des solutions de l'équation avec ou sans second membre et du lien de cet ensemble avec celui des fonctions bornées de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Une troisième partie (la partie 1 du problème), étudie plus particulièrement une fonction 2π-périodique, ses coefficients de Fourier et la convergence de la série de Fourier associée. Cette fonction permet ensuite de montrer que
$$h : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{a^2+n^2}$$
est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\left]-\pi\,;\pi\right[$ pour tout $a \in \mathbb{R}^*$. On prouve alors que la fonction h vérifie une équation différentielle du type de celles étudiées dans les préliminaires, ce qui permet d'en donner une expression explicite sur $\left]-\pi\,;\pi\right[$ puis sur $[-\pi\,;\pi]$. Ce dernier résultat permet le calcul de certaines séries.
- Enfin, une dernière partie (la partie 2 du problème) est consacrée à l'étude de la convergence et au calcul de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(ax)}{\mathrm{e}^{\,x}-1}\,\mathrm{d}x$$
pour tout $a > 0$. On y utilise des résultats de la partie 1.

Il s'agit donc d'un sujet d'analyse étudiant plusieurs thèmes centraux du programme, d'un niveau totalement abordable, ce qui permet de travailler ou réviser les chapitres correspondants. Les deux premières parties permettent également de faire le point sur sa connaissance du cours, comme le souligne le rapport du jury sur cette épreuve.

Indications

Applications directes du cours

3.1 H est une symétrie vectorielle de E si et seulement si H est un endomorphisme de E et $\mathrm{H} \circ \mathrm{H} = \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}}$.

3.2 Si H est une symétrie vectorielle de E, alors $\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} - \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} + \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})$.

4 Démontrer que la réciproque de la question 1 est vraie et donner un contre-exemple pour démontrer que la réciproque de la question 2 est fausse.

5 Raisonner par analyse-synthèse. Considérer une fonction f solution de l'équation, puis utiliser la décomposition de f comme somme d'une fonction paire u et d'une fonction impaire v. Réécrire l'équation en remplaçant f par $u + v$. Utiliser ensuite l'unicité de la décomposition pour en déduire deux équations différentielles vérifiées respectivement par u et par v. Les résoudre et conclure.

Préliminaires

2 Penser au théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

3 Utiliser la question 2.

4 Utiliser la conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire sur la structure des solutions d'une équation linéaire homogène du second ordre.

5 Étudier et résoudre l'équation caractéristique associée en distinguant les cas : $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$.

6 Utiliser la conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire sur la structure des solutions d'une équation linéaire du second ordre avec second membre. Pour déterminer une solution particulière de l'équation, chercher une solution constante dans les cas où $\lambda \neq 0$ et une solution polynomiale dans le cas où $\lambda = 0$.

7.1 Distinguer les cas $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ et $\lambda < 0$. Dans les cas $\lambda \geqslant 0$, utiliser les vitesses de croissance en $+\infty$ et/ou en $-\infty$ des fonctions de la base de $\mathrm{Ker}\,(\varphi)$.

7.3 Raisonner par l'absurde. Utiliser et comparer les vitesses de croissance en $+\infty$ et/ou en $-\infty$ des fonctions intervenant dans la décomposition.

7.4 Deux sous-espaces supplémentaires sont nécessairement en somme directe. Pour le cas $\lambda < 0$, utiliser la question 7.3.

Partie 1

1.1.1 Étudier la fonction sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$ et en déduire par des translations le graphe de la fonction sur $[\,-2\pi\,;5\pi\,]$.

1.1.3 Utiliser le théorème de Dirichlet.

1.1.4 Appliquer la convergence de la série de Fourier de f en 0.

1.1.5 Utiliser le critère spécial des séries alternées.

1.1.6 Appliquer la convergence de la série de Fourier de f en π.

1.1.7 Démontrer que la fonction f' n'est pas continue en π.

1.2.1 Démontrer que la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ et que les fonctions

$$x \mapsto (-1)^n \frac{\cos(nx)}{(n^2 + a^2)}$$

sont continues sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1.2.2 Écrire sous forme de série la fonction $h - f$.

1.2.3 Montrer que les fonctions v_n sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ puis que les séries de fonctions $\sum v_n$, $\sum v_n{}'$ et $\sum v_n{}''$ convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

1.3 Calculer h'' et exprimer en particulier $\left(\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n\right)''$ en fonction de h.

1.5 Utiliser la question 6 des Préliminaires pour en déduire l'expression de la fonction h puis calculer la dérivée de cette expression. Appliquer le résultat de la question 1.4 pour en déduire l'expression demandée de h.

1.6 Employer un argument de continuité des fonctions de l'expression.

1.7 Appliquer les expressions de la fonction h des questions 1.2 et 1.5 au réel π.

1.8 Calculer la limite en 0 de l'expression obtenue à la question 1.7 en utilisant les développements limités des fonctions ch et sh en 0.

Partie 2

2.2.2 Faire deux intégrations par parties successives pour calculer J_k pour tout $k \geqslant 1$.

2.3 Écrire en fonction des $(\mathrm{J}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ la somme

$$a \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^2 + (k+1)^2}$$

puis utiliser la linéarité de l'intégrale. Reconnaître enfin la somme d'une suite géométrique pour écrire R_n sans le symbole $\sum$.

2.4 Penser au théorème de convergence dominée.

2.5 Calculer de deux façons différentes la limite de la suite

$$\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a^2 + (k+1)^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$$

en utilisant les questions 1.7 et 2.3.

Applications directes du cours

1 Soit f une fonction de E. Supposons que la fonction f est paire. On a alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = f(-x) \tag{1}$$

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(-x)$. La fonction g est la composée de la fonction $x \mapsto -x$ par la fonction f et ces deux fonctions sont de classe $\mathscr{C}^\infty$. La fonction g est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Dérivons maintenant les deux membres de l'égalité (**1**) :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = -f'(-x)$$

Par conséquent, la fonction f' est impaire, d'où

$$\boxed{\text{Si la fonction } f \text{ est paire, alors la fonction } f' \text{ est impaire.}}$$

2 On raisonne de la même façon pour une fonction f de E impaire. En effet, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = -f(-x) \tag{2}$$

D'après la question 1, la fonction $x \mapsto f(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. D'où, en dérivant les deux membres de l'égalité (**2**), on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f'(-x)$$

Par conséquent, la fonction f' est paire. Ainsi,

$$\boxed{\text{Si la fonction } f \text{ est impaire, alors la fonction } f' \text{ est paire.}}$$

3.1 Vérifions que H est une symétrie vectorielle de E. Commençons par prouver que H est un endomorphisme de E. Soient u et v deux applications de E et λ un réel. On a alors pour tout réel x,

$$[\mathrm{H}(u+\lambda v)](x) = [u+\lambda v](-x) = u(-x) + \lambda v(-x) = [\mathrm{H}(u)](x) + \lambda[\mathrm{H}(v)](x)$$

Par conséquent, $\mathrm{H}(u+\lambda v) = \mathrm{H}(u) + \lambda \mathrm{H}(v)$ et H est un endomorphisme de E. De plus,

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad [\mathrm{H}\,(\mathrm{H}(u))]\,(x) = [\mathrm{H}(u)](-x) = u\,(-(-x)) = u(x)$$

Ainsi, $\mathrm{H} \circ \mathrm{H}(u) = u$ d'où $\mathrm{H} \circ \mathrm{H} = \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}}$. En conclusion,

$$\boxed{\text{H est une symétrie vectorielle de E.}}$$

Il est important de ne pas oublier de justifier que H est d'abord un endomorphisme de E, le rapport du jury insiste sur ce point en particulier.

3.2 Comme H est une symétrie vectorielle de E,

$$\mathrm{E} = \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} - \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}}) \oplus \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} + \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})$$

Tout élément u de E s'écrit alors de façon unique comme la somme d'une fonction de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} - \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})$ et d'une fonction de $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} + \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}})$. Caractérisons ces deux noyaux.

$$f \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} - \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}}) \iff \mathrm{H}(f) = f \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad f(-x) = f(x) \iff f \text{ est paire}$$

$$g \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{H} + \mathrm{id}_{\,\mathrm{E}}) \iff \mathrm{H}(g) = -g \iff \forall x \in \mathbb{R} \quad g(-x) = -g(x) \iff g \text{ est impaire}$$