Centrale Maths 2 PSI 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Céline Chevalier (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce sujet s'intéresse à l'ensemble Sim(E) des similitudes d'un espace vectoriel euclidien E. Plus précisément, si E est de dimension n, l'objectif du problème est de déterminer la dimension maximale d_n d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ inclus dans Sim(E). Il procède pour cela en deux temps :

- La première partie établit une caractérisation des similitudes de E et prouve plusieurs propriétés sur les endomorphismes antisymétriques. Ceci permet d'obtenir un encadrement de d_n, puis sa valeur lorsque n est impair. L'aboutissement de cette partie est la démonstration de l'équivalence entre l'existence d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ de dimension d inclus dans Sim(E) et l'existence d'une famille $(f_1, \ldots, f_{d-1})$ d'automorphismes orthogonaux antisymétriques telle que
$$\forall i \neq j \qquad f_i f_j + f_j f_i = 0$$
- Cette équivalence est ensuite exploitée dans la deuxième partie, pour calculer d_n dans plusieurs cas particuliers : $n = 2p$ avec p impair, puis $n = 4$, $n = 8$ et enfin $n = 12$, l'objectif étant de conjecturer la valeur de d_n dans le cas général.

Comme le résume le rapport du jury, ce sujet comporte « des parties "faciles", découlant directement des définitions ou théorèmes classiques du cours, notamment les débuts des deux parties. Les "milieux et fins" de ces parties [sont], en revanche, plus difficiles [...]. Ils [exigent] un effort de réflexion, de compréhension et parfois même d'ingéniosité. » C'est un problème qui permet à la fois de bien réviser l'algèbre bilinéaire et de s'essayer à une démarche d'investigation mathématique peu fréquente dans les énoncés de concours.

Indications

Partie I

I.A.2 Montrer les équivalences $i) \Leftrightarrow ii)$ et $i) \Leftrightarrow iii)$.

I.B.2 Revenir à la définition de l'orthogonal d'un espace : $f(x) \in \mathrm{S}^\perp$ si et seulement si $\langle f(x), y\rangle = 0$ pour tout $y \in \mathrm{S}$.

I.B.3 Montrer que $\langle f(x), g(x)\rangle = -\langle g(x), f(x)\rangle$.

I.B.4 Partir de $f^2 = -f^* f$.

I.C.1 Considérer l'espace $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{Id}_{\,\mathrm{E}})$.

I.C.2 Démontrer que l'application Φ est injective.

I.C.3 Considérer $\mathrm{Vect}\,(\mathrm{I}_2, \mathrm{A})$, où A est une matrice antisymétrique la plus simple possible.

I.C.4 Prouver que fg^{-1} possède au moins une valeur propre réelle.

I.C.5 Composer tous les endomorphismes de V par g^{-1}, où g est un endomorphisme inversible de V.

I.D.1 Utiliser la caractérisation $ii)$ de la question I.A.2 . Pour cela, considérer par exemple l'endomorphisme $f_i + \mathrm{Id}_{\,\mathrm{E}}$.

I.D.3.a Calculer $(g_i + g_j)^2$ puis appliquer la question I.B.4 .

I.D.3.c Reprendre le raisonnement de la question I.D.3.a pour h_i et h_j et calculer de deux façons $(h_i \mid h_j)$.

Partie II

II.A.1.b Raisonner sur $\mathrm{S}^\perp$.

II.A.2 Montrer par l'absurde que $d_{2p} \leqslant 2$ puis chercher un exemple de sous-espace de dimension 2 en réutilisant celui de la question I.C.3 .

II.B.1.a Exprimer les coefficients comme des produits scalaires entre $f_3(x)$ et les éléments de la base.

II.B.1.b Calculer de deux façons différentes la valeur $f_3(x + y)$ où y est un vecteur non nul.

II.B.2 Utiliser la caractérisation $ii)$ de la question I.A.2.

II.C.1 Raisonner par l'absurde et calculer $f_3 f_4$.

II.C.3 Considérer la somme d'un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et d'un vecteur propre associé à la valeur propre -1.

II.C.4 Raisonner comme dans les questions II.A.1 et II.B.1 .

II.C.5.c Montrer d'abord que $f_4(e) \in \mathrm{V}$ puis décomposer un vecteur quelconque de $\mathrm{V}^\perp$ selon la base orthonormale donnée avant de lui appliquer f_4.

II.C.5.d Pour la conclusion, appliquer la question I.D.4 à $(\mathrm{W} \oplus \mathrm{V}^\perp)^\perp$.

II.C.6 Pour montrer que $d_{12} \geqslant 4$, utiliser le même exemple qu'à la question II.B.2 en remplaçant chaque élément a de la matrice par un bloc $a\mathrm{I}_3$.

II.D Remarquer que $\sqrt{{x_0}^2 + \cdots + {x_7}^2}\ \mathrm{M}(x_0, \ldots, x_7)$ est orthogonale pour tout $(x_0, \ldots, x_7) \in \mathbb{R}^8$. Ces matrices forment un sous-espace de dimension 8.

II.E Résumer tous les résultats obtenus et considérer la puissance de 2 dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Le rapport du jury signale que ce sujet « a bien rempli son rôle. L'écart-type est particulièrement important et les bonnes copies qui révèlent compréhension, connaissances et "inventivité" conjuguée avec rigueur obtiennent des notes en correspondance avec les qualités manifestées. » Il note également que « les très bonnes copies sont très rares » et font preuve à la fois de « maîtrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux ». Le jury déplore en revanche avoir vu dans d'autres copies « des fautes de raisonnement grossières et des erreurs portant sur des notions de base ».

La forme laisse également parfois à désirer : « les correcteurs n'ont aucune demande "calligraphique", mais de futurs ingénieurs devaient être capables de fournir un texte lisible, si possible pas trop "truffé" de fautes d'orthographe. » Autre reproche du même ordre, « anecdotique mais désagréable : la plupart des candidats ne numérote pas les feuilles, les questions non plus, d'ailleurs. Le correcteur est souvent perplexe devant un "b)", tout seul, perdu en début d'une feuille sans aucun repère ! Pour peu que le raisonnement soit lui-même un peu "fumeux", sa patience est mise à rude épreuve ! »

Enfin, le jury répète que les « affirmations du type : "il est clair que ...", "il est évident que ...", "on voit immédiatement que ...", pour justifier une proposition qui mérite d'être démontrée, se soldent par un zéro. Aucun point n'est prévu pour récompenser une conviction même si elle semble sincère. Le jury attend qu'on lui apporte une démonstration achevée, cohérente où les arguments soient clairement étayés. »

Il ressort de ces conseils qu'il est aussi important de soigner la présentation de sa copie que le fond. Attention donc à bien maîtriser les résultats essentiels, faire des raisonnements cohérents et justifier les réponses, mais également à soigner votre orthographe et votre style. Ne négligez pas les conseils de vos professeurs à ce sujet durant l'année...

I. Premières propriétés

I.A Étude de Sim(E)

I.A.1 Notons $\text{Sim}^*(\text{E})$ l'ensemble des similitudes non nulles de E. Montrons que c'est un sous-groupe de $\text{GL}(\text{E})$:

- Toute similitude f non nulle est la composée d'une homothétie de rapport non nul et d'un automorphisme orthogonal, tous deux inversibles, donc f est inversible. Ainsi, $\text{Sim}^*(\text{E}) \subset \text{GL}(\text{E})$.
- $\text{Id}_{\text{E}} \in \text{Sim}^*(\text{E})$ donc il est non vide.
- Soit $(f, g) \in (\text{Sim}^*(\text{E}))^2$. Par définition, il existe $(\text{F}, \text{G}) \in \text{O}(\text{E})^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^{*2}$ tels que $f = \lambda\text{F}$ et $g = \lambda\text{G}$. Comme $\text{O}(\text{E})$ est un groupe, $\text{FG} \in \text{O}(\text{E})$. Ainsi, $fg = (\lambda\mu)(\text{FG}) \in \text{Sim}^*(\text{E})$.
- Soit $f \in \text{Sim}^*(\text{E})$. Il existe $\text{F} \in \text{O}(\text{E})$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $f = \lambda\text{F}$. Comme $\text{O}(\text{E})$ est un groupe, $\text{F}^{-1} \in \text{O}(\text{E})$. Par suite, $f^{-1} = \lambda^{-1}\text{F}^{-1} \in \text{Sim}^*(\text{E})$.

Finalement,

$$\boxed{\text{Sim}^*(\text{E}) \text{ est un sous-groupe de GL(E) pour la composition des applications.}}$$

Le jury regrette que « de nombreux candidats ignorent totalement ce qu'est un sous-groupe ». Ne perdez pas de points sur des questions aussi faciles...

I.A.2 Montrons d'abord l'équivalence $i) \Leftrightarrow ii)$:

- ***i)* ⇒ *ii)* :** Soit $h \in \text{Sim(E)}$. Il existe $f \in \text{O(E)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda f$. Ainsi,

$$h^*h = (\lambda f)^*(\lambda f) = \lambda^2 f^* f = \lambda^2 \, \text{Id}_{\,\text{E}}$$

  puisque $f \in \text{O(E)}$. Par suite, h^*h est colinéaire à $\text{Id}_{\,\text{E}}$.

- ***ii)* ⇒ *i)* :** Si h est l'application nulle, alors $h \in \text{Sim(E)}$. Sinon, si h^*h est colinéaire à $\text{Id}_{\,\text{E}}$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h^*h = \lambda \, \text{Id}_{\,\text{E}}$. Ainsi,

$$\forall x \in \text{E} \qquad \|h(x)\|^2 = \langle h(x), h(x) \rangle = \langle h^*h(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

  Comme $h \neq 0$, on peut trouver $x \in \text{E}$, $x \neq 0$, tel que $h(x) \neq 0$. On en déduit que $\lambda > 0$. Posons $g = (1/\sqrt{\lambda})h$. Alors $g^*g = \text{Id}_{\,\text{E}}$ et $g \in \text{O(E)}$. Par suite, $h = \sqrt{\lambda} g \in \text{Sim(E)}$.

Montrons ensuite l'équivalence $i) \Leftrightarrow iii)$:

- ***i)* ⇒ *iii)* :** Soit $h \in \text{Sim(E)}$. Il existe $f \in \text{O(E)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $h = \lambda f$. D'après le cours, la matrice P de f dans une base orthonormale est alors orthogonale. Celle de h est alors égale à λP, donc colinéaire à une matrice orthogonale.

- ***iii)* ⇒ *i)* :** Si la matrice de h dans une base orthonormale est de la forme $\text{A} = \lambda\text{P}$ avec P orthogonale, alors l'endomorphisme g associé à P est orthogonal et $h = \lambda g \in \text{Sim(E)}$.

$$\boxed{\text{Il y a équivalence entre les trois propriétés } i),\ ii) \text{ et } iii).}$$

La preuve « cyclique » $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow i)$ n'est pas toujours la plus aisée. Ici, il était plus facile de se ramener systématiquement à l'hypothèse la plus simple, à savoir « $h \in \text{Sim(E)}$ ».

La preuve $ii) \Rightarrow iii)$ demandait sinon de savoir redémontrer le résultat classique « ${}^t\text{H}\,\text{H} = 0 \Rightarrow \text{H} = 0$ », dont on rappelle ici la preuve. Soit $\text{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a ${}^t\text{H}\,\text{HX} = 0$, d'où ${}^t\text{X}\,{}^t\text{H}\,\text{HX} = 0$. Ceci se récrit ${}^t(\text{HX})\,\text{HX} = 0$, c'est-à-dire $\|\text{HX}\|^2 = 0$, en utilisant la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$. Par suite, $\text{HX} = 0$. Comme ceci est vrai pour tout $\text{X} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\text{H} = 0$.

Le rapport du jury regrette que « la plupart des élèves semble incapable de gérer un raisonnement par équivalence : ils débutent sur des équivalences (plus ou moins bien étayées), puis continuent sur des implications (elles aussi plus ou moins bien étayées) et enfin terminent sur une équivalence ! » Ne tentez pas le diable et raisonnez plutôt par implication, ce qui est plus facile. Le rapport résume bien ce problème en rappelant qu'« il faut toujours se méfier des raisonnements qui tendent à prouver directement une équivalence ($i) \Leftrightarrow ii)$). Ils conduisent souvent le candidat à ne pas voir une difficulté et à faire un raisonnement faux par négligence. »