# X Physique 2 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (ENS Ulm) ; il a été relu par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce sujet, composé de trois parties liées, se propose d'étudier l'interaction entre un faisceau laser et des billes métalliques dont la taille est bien inférieure à la longueur d'onde. Cette interaction induit un moment dipolaire électrique dans la bille et on peut alors observer des résonances.

- La première partie débute par l'analyse du déplacement du nuage électronique par rapport aux ions sous l'effet d'un champ électrique statique. On généralise ces résultats au cas d'un champ oscillant : le dipôle est vu comme un oscillateur harmonique. Ce modèle présentant des divergences au voisinage de la résonance, un frottement dissipatif est alors pris en compte et l'allure de la courbe de résonance est étudiée. Cette partie est abordable par les élèves de toutes les filières, dès la première année si l'on admet le lien entre l'intensité du faisceau laser et le champ électrique.
- Plus calculatoire, la deuxième partie s'intéresse au rayonnement et à la dissipation au cours des oscillations des dipôles. Ils sont utilisés dans des méthodes de détection. La résolution de cette partie peut éventuellement être facilitée par la connaissance du cours sur les milieux diélectriques, propre au programme de la filière PC, mais les élèves des autres filières peuvent certainement s'y frotter avec profit.
- La troisième partie repose exclusivement sur le programme de la filière PC. Elle présente peu de difficultés mais requiert une bonne connaissance des définitions du cours. Après quelques rappels de formules, on retrouve le lien entre le champ électrique excitateur et le champ à l'intérieur du milieu. La prise en compte des électrons liés amène à une nouvelle étude succincte de la résonance.

Cette épreuve, longue et calculatoire, teste plusieurs compétences, notamment la maîtrise des méthodes de calcul en régime sinusoïdal forcé (établissement de fonctions de transfert, calcul de valeurs moyennes) et la connaissance du cours sur les milieux diélectriques. Elle constitue une bonne épreuve d'entraînement pour les élèves visant l'X ou les ENS.

## Indications

### Partie I

I.2.5 Relier $\overrightarrow{p_0}$ à la charge portée par la boule ionique et à $\overrightarrow{\delta_{\rm S}}$.

I.3.1 Remarquer que $\overrightarrow{\delta}$ est également le déplacement d'un électron et écrire le principe fondamental de la dynamique.

I.4.2 À la résonance $({\omega_0}^2-\omega^2)^2+(\gamma\omega)^2$ est minimum.

I.4.3 $|\overrightarrow{\rm E_0}|$ et $\rm I_0$ sont reliés par $\qquad {\rm I_0}=\dfrac{\varepsilon_0 c}{2}|\overrightarrow{\rm E_0}|^2$

I.4.4 Le champ électrique interne est la somme du champ excitateur $\overrightarrow{\rm E_0}$ au point O et du champ $\overrightarrow{\rm E_d}$.

I.5.1 Utiliser le résultat de la question I.4.2 en prenant garde que $\overrightarrow{p}$ est le moment dipolaire électrique total de la particule (et non celui dû à un seul électron).

I.5.2 Utiliser le formulaire et simplifier les expressions proposées à l'aide de la condition $\lambda \gg r$. Montrer que

$$\overrightarrow{\rm E}=\overrightarrow{\rm E_0}-\frac{p}{4\pi\,\varepsilon_0\,r^3}\overrightarrow{e_z}$$

### Partie II

II.1.2 Grâce au formulaire, on obtient l'expression de $\rm P_d$.

II.1.3 Se placer à résonance. Pour qu'il y ait détection, il faut $\rm P_d/2>10^{-9}$ W.

II.2.1 Montrer que $\qquad {\rm P_a}=m\gamma\langle\dot{\delta}^2\rangle\times\dfrac{4\pi}{3}{\rm N}a^3$

II.2.3 La variation d'intensité due à l'absorption est $\rm P_a/(\pi a^2)$.

II.3.1 Pour calculer $\rm N_M$ : l'espace mis à la disposition d'une particule est $4\pi\,(4a)^3/3$.

II.3.2 Utiliser la formule obtenue à la question I.5.1 pour exprimer la polarisation volumique. L'indice optique est défini par $\widetilde{n}=\sqrt{\widetilde{\varepsilon}/\varepsilon_0}$. Effectuer un développement limité en utilisant les conditions $n''\ll n'$ et $n'\simeq 1$.

II.3.3 Après propagation de l'onde sur une longueur L, le champ électrique a varié proportionnellement à $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\widetilde{n}\,k\mathrm{L}}$.

### Partie III

III.1.2 Utiliser les résultats des questions I.2.5 et III.1.1.

III.2.2 La densité de courant est reliée à la vitesse des porteurs par $\overrightarrow{\jmath}={\rm N}(-e)\overrightarrow{v}$.

III.3.1 Remarquer que $\varepsilon_{\rm met}+2\,\varepsilon_{\rm ext}=\varepsilon_0(1+\chi_{\rm met}+2\,\varepsilon_{\rm ext}/\varepsilon_0)$ et

$$\chi_{\rm met}=\frac{\sigma}{\mathrm{i}\omega\,\varepsilon_0}+\chi_{\rm b}$$

Dans l'hypothèse $\gamma\ll\omega;\omega_{\rm p}$, $(\gamma\omega)^2+\omega^4$ peut être remplacé par $\omega^4$.

III.3.2 Désormais, $\qquad \overrightarrow{\rm E_{int}}=\dfrac{3\,\varepsilon_{\rm ext}}{\varepsilon_{\rm met}+2\,\varepsilon_{\rm ext}}\overrightarrow{\rm E_0}$

III.3.4 Différentier logarithmiquement

$$\omega_{\rm R}=\frac{\omega_{\rm p}}{\sqrt{1+\chi_{\rm b}+2\,\varepsilon_{\rm ext}/\varepsilon_0}}\qquad\text{et}\qquad\lambda_{\rm R}=\frac{2\pi\,c}{\omega_{\rm R}}$$

# Réponse optique de nano-objets métalliques

## I. Résonance optique d'un agrégat métallique

**I.1** Considérons un point $\mathrm{M}(\overrightarrow{r})$. Tout plan contenant la droite (OM) est plan de symétrie pour la distribution de charges. Or $\overrightarrow{\mathrm{E}_+}$ est un vecteur polaire, donc $\overrightarrow{\mathrm{E}_+}$ est selon l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire que $\overrightarrow{\mathrm{E}_+}$ est selon la droite (OM). Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}_+} \text{ est radial.}}$$

De plus, l'invariance par rotation de la distribution de charges impose que la norme de $\overrightarrow{\mathrm{E}_+}$ est indépendante de $\theta$ et de $\varphi$, si bien que

$$\overrightarrow{\mathrm{E}_+} = \mathrm{E}_+(r)\,\overrightarrow{e_r}$$

Appliquons alors le théorème de Gauss en utilisant la sphère de centre O et de rayon $r = \mathrm{OM}$ comme surface d'intégration,

$$\frac{q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0} = \oiint \overrightarrow{\mathrm{E}_+}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = \mathrm{E}_+(r)\,4\pi\,r^2$$

où $q_{\mathrm{int}}$ est la charge à l'intérieur de la sphère.

- Pour $r < a$, $$q_{\mathrm{int}} = \frac{4\pi}{3}\,r^3\,\mathrm{N}e$$

  d'où $$\frac{4\pi}{3\,\varepsilon_0}\,r^3\,\mathrm{N}e = \mathrm{E}_+(r)\,4\pi\,r^2$$

- Pour $r > a$, $q_{\mathrm{int}} = 4\pi\,a^3\,\mathrm{N}e/3$, alors $$\frac{4\pi}{3\,\varepsilon_0}\,a^3\,\mathrm{N}e = \mathrm{E}_+(r)\,4\pi\,r^2$$

Si bien que
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}_+} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{N}e}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{r} & \text{pour } r \leqslant a \\[2ex] \dfrac{\mathrm{N}e\,a^3}{3\,\varepsilon_0\,r^3}\,\overrightarrow{r} & \text{pour } r \geqslant a \end{cases}}$$

On obtient un résultat analogue pour le champ $\overrightarrow{\mathrm{E}_-}$ en changeant $e$ en $-e$ dans les résultats précédents. Par conséquent,

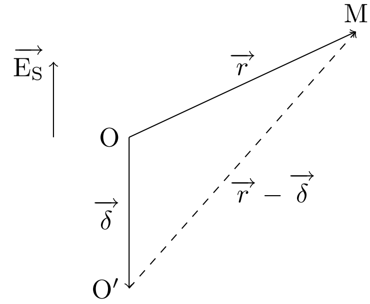
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E}_-} = \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{N}e}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{r} & \text{pour } r \leqslant a \\[2ex] -\dfrac{\mathrm{N}e\,a^3}{3\,\varepsilon_0\,r^3}\,\overrightarrow{r} & \text{pour } r \geqslant a \end{cases}}$$

> À chaque fois, les champs sont continus en $r = a$ ce qui est en accord avec l'approche volumique choisie.

**I.2.1** La boule ionique est chargée positivement ; le champ électrostatique $\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$ exerce donc sur elle une force colinéaire (c'est-à-dire selon O$z$) et de même sens que $\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$ : c'est la force électrique de Lorentz. Il en va de même pour la boule électronique qui subit une force colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$ mais de sens contraire (car la boule électronique est chargée négativement). Ainsi, **Les boules ionique et électronique tendent à s'écarter selon O$z$ sous l'action du champ $\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$**.

**I.2.2** Utilisons les expressions des champs obtenues à la question I.1 pour $r < a$,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{E_d}} &= \overrightarrow{\mathrm{E_+}} + \overrightarrow{\mathrm{E_-}}\\ &= \frac{\mathrm{N}e}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{OM}} - \frac{\mathrm{N}e}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\mathrm{O'M}}\\ \overrightarrow{\mathrm{E_d}} &= \frac{\mathrm{N}e}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{r} - \frac{\mathrm{N}e}{3\,\varepsilon_0}\,(\overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{r})\end{aligned}$$




On en conclut
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{E_d}} = \frac{\mathrm{N}e}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\delta}}$$

Ce champ exerce sur un électron la force $\overrightarrow{\mathrm{F_d}} = -e\,\overrightarrow{\mathrm{E_d}}$, c'est-à-dire
$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{F_d}} = -\frac{\mathrm{N}e^2}{3\,\varepsilon_0}\,\overrightarrow{\delta}}$$

**I.2.3** La force totale s'exerçant sur un électron est la somme des forces de Lorentz dues au champ statique $\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$ et au champ $\overrightarrow{\mathrm{E_d}}$. À l'équilibre, cette force est nulle donc
$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\mathrm{F_d}} - e\,\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$$

Ainsi,
$$\boxed{\overrightarrow{\delta_\mathrm{S}} = -\frac{3\,\varepsilon_0}{\mathrm{N}e}\,\overrightarrow{\mathrm{E_S}}}$$

Ce résultat montre que le déplacement d'un électron est indépendant de la position $\overrightarrow{r}$ de l'électron ; il est **en accord avec l'hypothèse d'un déplacement uniforme du nuage électronique**. Enfin, puisque $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\mathrm{F_d}} - e\,\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$,
$$\overrightarrow{0} = \overrightarrow{\mathrm{E_d}} + \overrightarrow{\mathrm{E_S}}$$

Mais, comme le champ électrique total est égal à $\overrightarrow{\mathrm{E_d}} + \overrightarrow{\mathrm{E_S}}$, on en déduit que **le champ électrique total est nul à l'équilibre**.

> Le champ $\overrightarrow{\mathrm{E_d}}$ est souvent appelé « champ dépolarisant » (d'où l'indice « d ») ; en effet, ce champ s'oppose au champ $\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$ qui polarise l'atome. Le champ $\overrightarrow{\mathrm{E_S}}$ tend à écarter le nuage électronique et le noyau, le champ $\overrightarrow{\mathrm{E_d}}$ tend à les rapprocher ; ces effets antagonistes conduisent à l'existence d'une distance d'équilibre non nulle entre les centres du nuage électronique et du noyau.