Mines Maths 2 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Romain Cosset (ENS Cachan) ; il a été relu par Alban Levy (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Le but de ce problème est d'établir une généralisation du théorème de Rolle. Ce dernier, dans sa version usuelle, assure que si une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ prend la même valeur en deux points a et b, alors sa dérivée s'annule au moins une fois entre ces deux points. Le résultat ne s'étend pas, dans le cas général, aux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Par exemple, la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$ prend la même valeur en 0 et en 2π, mais sa dérivée $x \longmapsto \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$ ne s'annule jamais. Cependant, si l'on se limite aux fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on obtient un analogue du théorème de Rolle en remplaçant l'intervalle ouvert $]\,a\,;b\,[$ par un disque défini en fonction de a, b et du degré du polynôme.

Le problème est composé de trois parties.

- La première est algébrique : on y étudie un opérateur linéaire sur les polynômes à coefficients complexes de degré n. En particulier, on détermine ses valeurs propres et ses sous-espaces propres. Les résultats de cette partie découlent plus ou moins directement du cours.
- Dans la deuxième partie, on étudie l'action géométrique de l'inversion $z \mapsto 1/z$, en particulier son action sur les cercles. C'est une bonne occasion d'exercer son intuition géométrique dans un domaine peu traité en cours.
- La dernière partie est consacré à la preuve du théorème. Elle s'appuie pour cela sur les résultats de la partie 2.

Ce sujet est assez difficile car, en dehors de la première partie, peu de résultats du cours sont utilisés. En particulier, la troisième partie demande de bien savoir utiliser les résultats des questions précédentes mais aussi de maîtriser les raisonnements classiques en mathématiques : preuve par cas (question 11,13), par contraposé (question 13) ou par récurrence comme à la question 14.

Indications

Partie A

3 Montrer que la famille $\{(\mathrm{X}-z)^k,\ 0 \leqslant k \leqslant n\}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

4 Étudier l'image des $(\mathrm{X}-z)^k$ par $\widehat{\mathrm{A}_z}$.

5 Diagonaliser $\widehat{\mathrm{A}_z}$ et E dans la même base.

Partie B

6 Reconnaître le même type d'égalité pour le point $f(z) = 1/z$.

7 Montrer d'abord une inclusion avant de l'appliquer au cercle $f(\mathscr{C})$.

8 Penser aux propriétés des barycentres dans les convexes.

9 Utiliser une translation pour se ramener à la question précédente.

Partie C

13 Utiliser un cercle $\mathscr{C}$ inclus dans $\mathscr{C}_1$ mais contenant les z_i et appliquer la question 9.

14 Procéder par récurrence sur le degré des polynômes P et Q. Utiliser le résultat de la question 12 pour traiter le cas de base et appliquer l'hypothèse de récurrence au polynôme $\mathrm{A}_{z'_n}\mathrm{P}(\mathrm{X})$ si z'_n est hors du disque.

15 Considérer les polynômes $\mathrm{T}_k(\mathrm{X}) = \dbinom{n-1}{k}\mathrm{X}^k$.

17 Montrer que les zéros de Δ appartiennent à l'intérieur du cercle de centre $(a+b)/2$ et de rayon $\mathrm{R}_n(a,b)$.

Les conseils du jury

Le jury apporte de nombreux conseils pour « améliorer sensiblement sa performance en prêtant attention à quelques « détails » :

- Soigner sa rédaction : il faut trouver le juste équilibre entre répondre au plus grand nombre de questions possible et répondre sans ambiguïtés. En effet, une réponse juste mais mal justifiée ne peut être accréditée de tous les points. Les réponses doivent donc être succinctes mais complètes, cela fait partie de l'épreuve.
- Écrire proprement : des petits caractères avec un stylo plume épais sont illisibles et la pénalité peut être très importante.
- Ne pas « tricher » : si la justification que vous proposez vous paraît erronée ou insuffisante, ne la donnez pas. Le correcteur estimerait que vous ne maîtrisez pas les outils ou que vos connaissances sont superficielles.
- Mettre sa copie en valeur : vos copies sont examinées par des humains... les copies illisibles et celles sur lesquelles le correcteur passe plus de temps à chercher les réponses qu'à vérifier leur justesse seront mal notées, c'est mathématique !
- Prendre le temps de lire le sujet en entier avant de rédiger : ceci permet de mieux comprendre les objets traités. »

A. Définition de $\mathrm{A}_z\mathrm{P}(\mathrm{X})$

1 Pour tout polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$ à coefficients complexes, le coefficient du terme de degré n de $(z-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + n\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est $-na_n + na_n = 0$. Ceci prouve que l'application A_z définie a priori de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ dans $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ est bien à valeurs dans $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$. De plus, pour $\mathrm{P},\mathrm{Q} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_z(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{X}) &= (z-\mathrm{X})(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})'(\mathrm{X}) + n(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{X}) \\
&= \lambda(z-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + (z-\mathrm{X})\mathrm{Q}'(\mathrm{X}) + \lambda n\mathrm{P}(\mathrm{X}) + n\mathrm{Q}(\mathrm{X}) \\
&= \lambda\left[(z-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + n\mathrm{P}(\mathrm{X})\right] + \left[(z-\mathrm{X})\mathrm{Q}'(\mathrm{X}) + n\mathrm{Q}(\mathrm{X})\right] \\
\mathrm{A}_z(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(\mathrm{X}) &= \lambda\mathrm{A}_z\mathrm{P}(\mathrm{X}) + \mathrm{A}_z\mathrm{Q}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

On a bien vérifié que

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{A}_z \text{ de } \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \text{ dans } \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}] \text{ est linéaire.}}$$

2 Soient z_1, z_2 deux nombres complexes et P un polynôme de degré au plus n. Par définition $\mathrm{A}_{z_2}\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (z_2-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + n\mathrm{P}(\mathrm{X})$ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$. Par ailleurs, pour $\mathrm{R} \in \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$,

$$\mathrm{A}_{z_1}\mathrm{R}(\mathrm{X}) = (z_1-\mathrm{X})\mathrm{R}'(\mathrm{X}) + (n-1)\mathrm{R}(\mathrm{X})$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}_{z_1}(\mathrm{A}_{z_2}\mathrm{P})(\mathrm{X}) &= (z_1-\mathrm{X})\big((z_2-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + n\mathrm{P}(\mathrm{X})\big)' \\
&\qquad + (n-1)\big((z_2-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + n\mathrm{P}(\mathrm{X})\big) \\
&= -(z_1-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + (z_1-\mathrm{X})(z_2-\mathrm{X})\mathrm{P}''(\mathrm{X}) + (z_1-\mathrm{X})n\mathrm{P}'(\mathrm{X}) \\
&\qquad + (n-1)(z_2-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + n(n-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}) \\
\mathrm{A}_{z_1}(\mathrm{A}_{z_2}\mathrm{P})(\mathrm{X}) &= (z_1-\mathrm{X})(z_2-\mathrm{X})\mathrm{P}''(\mathrm{X}) + (n-1)(z_1-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) \\
&\qquad + (n-1)(z_2-\mathrm{X})\mathrm{P}'(\mathrm{X}) + n(n-1)\mathrm{P}(\mathrm{X})
\end{aligned}$$

Les rôles de z_1 et z_2 étant symétriques, on peut les intervertir et obtenir que

$$\boxed{\mathrm{A}_{z_2}(\mathrm{A}_{z_1}\mathrm{P})(\mathrm{X}) = \mathrm{A}_{z_1}(\mathrm{A}_{z_2}\mathrm{P})(\mathrm{X})}$$

3 Commençons par remarquer que la famille formée des $n+1$ polynômes $(\mathrm{X}-z)^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant n$ forme une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ car ils sont de degrés distincts (c'est une famille de polynômes à degrés étagés). Soit P un polynôme de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$; il se décompose dans la base précédente : $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k(\mathrm{X}-z)^k$. La linéarité de A_z, prouvée à la question 1, permet d'intervertir la somme et l'opérateur et ainsi de se restreindre au calcul des $\mathrm{A}_z\big((\mathrm{X}-z)^k\big)$: pour k différent de 0,

$$\mathrm{A}_z\left((\mathrm{X}-z)^k\right)(\mathrm{X}) = (z-\mathrm{X})k(\mathrm{X}-z)^{k-1} + n(\mathrm{X}-z)^k = (n-k)(\mathrm{X}-z)^k$$

Comme $\mathrm{A}_z(1)(\mathrm{X}) = 0 + n \times 1 = n$, on a pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathrm{A}_z\left((\mathrm{X}-z)^k\right)(\mathrm{X}) = (n-k)(\mathrm{X}-z)^k$$

Supposons que P appartienne au noyau de A_z, on doit avoir

$$0 = \mathrm{A}_z\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \sum_{k=0}^{n} a_k(n-k)(\mathrm{X}-z)^k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(n-k)(\mathrm{X}-z)^k$$

La famille $(\mathrm{X}-z)^k$, $0 \leqslant k \leqslant n$ formant une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, la somme précédente est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls. c'est-à-dire que pour tout entier k strictement inférieur à n, $a_k(n-k)=0$ et donc $a_k=0$. Par ailleurs, on voit que pour tout $a_n \in \mathbb{C}$, $\mathrm{A}_z\big(a_n(\mathrm{X}-z)^n\big)=0$, d'où,

$$\boxed{\text{Les polynômes P de } \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \text{ tels que } \mathrm{A}_z\mathrm{P}(\mathrm{X}) \text{ est nul sont ceux de la forme } a_n(\mathrm{X}-z)^n \text{ avec } a_n \in \mathbb{C}.}$$

Le jury fait remarquer qu'« il ne suffit pas de tester une application linéaire sur les éléments d'une base pour étudier son noyau. En particulier, ce n'est pas parce que un seul vecteur de la base suggérée appartient au noyau de que le noyau se limite à la droite vectorielle engendrée par ce vecteur ! Par exemple pour l'application $(x,y) \mapsto x-y$, aucun vecteur de la base canonique n'est envoyé à 0 pourtant le noyau est une droite. »

D'après la question 1, l'application $\mathrm{A}_z : \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$ est linéaire et l'on vient de montrer qu'elle a pour noyau $\mathrm{Vect}\left\{(\mathrm{X}-z)^n\right\}$ qui est de dimension 1.

Puisque l'espace $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ est de dimension $n+1$, la dimension de l'image de A_z est n par le théorème du rang. Comme $\dim(\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}])=n$,

$$\boxed{\text{L'application } \mathrm{A}_z \text{ est surjective.}}$$

4 L'image de l'endomorphisme $\widehat{\mathrm{A}_z} : \mathbb{C}_n[\mathrm{X}] \to \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ est incluse dans $\mathbb{C}_{n-1}[\mathrm{X}]$. Pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$ on a montré à la question 3 que

$$\widehat{\mathrm{A}_z}\left((\mathrm{X}-z)^k\right)(\mathrm{X}) = (n-k)(\mathrm{X}-z)^k$$

Les nombres complexes $n-k$ sont donc des valeurs propres de $\widehat{\mathrm{A}_z}$ et les sous-espaces propres associés contiennent $\mathrm{Vect}\left\{(\mathrm{X}-z)^k\right\}$. Remarquons que pour $k=n$, il s'agit du noyau de l'application $\widehat{\mathrm{A}_z}$. On a trouvé $n+1$ valeurs propres distinctes de $\widehat{\mathrm{A}_z}$, or comme $\dim\left(\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]\right)=n+1$, les $n-k$ sont toutes les valeurs propres de $\widehat{\mathrm{A}_z}$ et la dimension de chaque sous-espace est égale à 1 :

$$\boxed{\text{Les valeurs propres de } \widehat{\mathrm{A}_z} \text{ sont les } \lambda_k = k \text{ pour } 0 \leqslant k \leqslant n \text{ associées aux sous-espaces propres } \mathrm{E}_{\lambda_k} = \mathrm{Vect}\left\{(\mathrm{X}-z)^{n-k}\right\}.}$$

L'endomorphisme $\widehat{\mathrm{A}_z}$ de l'espace $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ de dimension $n+1$ admettant ainsi $n+1$ valeurs propres distinctes,

$$\boxed{\widehat{\mathrm{A}_z} \text{ est diagonalisable.}}$$

5 Comme l'endomorphisme E commute avec $\widehat{\mathrm{A}_z}$, il doit laisser stable les sous-espaces propres de $\widehat{\mathrm{A}_z}$. Ces derniers étant de dimension 1, ce sont également des sous-espaces propres de E. Dans la base $\{(\mathrm{X}-z)^k, 0 \leqslant k \leqslant n\}$, les matrices des endomorphismes sont alors de la forme :

$$\mathrm{Mat}\,(\widehat{\mathrm{A}_z}) = \begin{pmatrix} n & & & \\ & n-1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Mat}\,(\mathrm{E}) = \begin{pmatrix} \mu_0 & & & \\ & \mu_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mu_n \end{pmatrix}$$