Centrale Maths 2 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) ; il a été relu par Ludovic Béguin (École Polytechnique) et Guillaume Batog (ENS Cachan).

Ce problème d'algèbre linéaire est constitué de trois parties indépendantes, à l'exception d'une question de la partie III.

- Dans une première partie, on s'intéresse aux systèmes de racines d'un espace vectoriel euclidien ; on en démontre quelques propriétés et on les décrit complètement en dimensions 1 et 2, ce qui occasionne de jolis dessins.
- La deuxième partie est une étude des matrices de trace nulle en dimension 2, à la fois sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$: on caractérise les matrices nilpotentes, les matrices semblables, puis on décrit tous les triplets admissibles.
- Enfin, dans la troisième partie, on étend ceci à un sous-espace particulier de $\mathscr{M}(4, \mathbb{R})$ après un petit intermède de diagonalisation simultanée.

Ce problème soulève peu de difficultés techniques mais, comme bien souvent (trop souvent) au concours Centrale, il est affreusement long et bien pénible à rédiger, surtout dans la dernière partie où les réponses aux questions se diluent au gré de calculs matriciels bestiaux !

On peut quand même déplorer l'absence d'applications concrètes des diverses propriétés démontrées au cours du problème ; les questions s'enchaînent bien, l'énoncé est agréablement directif, mais on ne comprend pas forcément ses objectifs.

Indications

Partie I

I.A Déterminer la décomposition d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ associée à la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Vect}\,(\alpha)^{\perp} \oplus \mathrm{Vect}\,(\alpha)$.

I.B Utiliser les propriétés 1 et 3 pour déterminer la forme générale d'un système de racines. Vérifier ensuite que les ensembles obtenus conviennent.

I.C.1.a Appliquer la propriété 4 aux couples (α, β) et (β, α), puis utiliser l'inégalité (stricte) de Cauchy-Schwarz.

I.C.1.b À l'aide de la question précédente, déterminer les valeurs possibles des entiers

$$\mathrm{N}_1 = 2\,\frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}\,|\cos\theta_{\alpha,\beta}| \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N}_2 = 2\,\frac{\|\alpha\|}{\|\beta\|}\,|\cos\theta_{\alpha,\beta}|$$

I.D.1 Utiliser le résultat de la question I.C.1.b pour montrer l'existence de

$$\theta_{\mathrm{R}} = \min\left\{\theta_{\alpha,\beta}\,\middle|\,(\alpha,\beta) \in \mathcal{R}^2, \alpha \text{ et } \beta \text{ non colinéaires}\right\}$$

I.D.2 Représenter un couple (α, β) se trouvant dans l'une des configurations du tableau et utiliser les propriétés 2 et 3 pour compléter la figure.

I.E.1 Il suffit d'exhiber une base de ce sous-espace vectoriel.

I.E.2 Pour la représentation, il suffit de montrer que le triangle de sommets 0, $e_1 - e_2$ et $e_1 - e_3$ est équilatéral.

Partie II

II.A.1 Utiliser les propriétés de la trace.

II.B On montrera d'abord que j est un morphisme injectif.

II.D.1 Pour le sens indirect, on déterminera les spectres possibles et l'on utilisera la question précédente.

II.E.1.b Raisonner par l'absurde et supposer que la famille proposée est liée.

II.E.2 S'inspirer de la stratégie adoptée au cours de la question II.D.1 et invoquer la question II.E.1.a pour le nouveau cas de figure.

II.E.3.a Noter qu'en dimension 2, le polynôme caractéristique d'une matrice ne dépend que de sa trace et de son déterminant.

II.F.2 Utiliser les questions II.C, II.D.1 et II.E.2.

II.G.2 On pourra commencer par montrer que $\left[\mathrm{P\,A\,P^{-1}}, \mathrm{P\,B\,P^{-1}}\right] = \mathrm{P}\,[\mathrm{A}, \mathrm{B}]\,\mathrm{P}^{-1}$ pour tous A, $\mathrm{B} \in \mathscr{M}(2, \mathbb{K})$ et $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{K})$.

II.G.3 Plus précisément, on utilisera la question II.F.3.

II.G.4.a Noter que $[\mathrm{H}, \mathrm{X}] = 2\mathrm{X}$ et appliquer ceci au vecteur u.

II.G.4.b Exprimer $\mathrm{H}u$ et $\mathrm{H}v$ en fonction de u et v, afin d'en déduire les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{K}^2$ par la matrice $\mathrm{Q}^{-1}\,\mathrm{H}\,\mathrm{Q}$.

II.G.4.c Simplifier la relation désirée et utiliser la question II.G.1.

II.G.5.c Utiliser les résultats des deux questions précédentes.

II.G.6 Faire appel aux questions II.G.3, II.G.4.c et II.G.5.c.

Partie III

III.A.1 En considérant la matrice de f dans une base adaptée, montrer que l'endomorphisme induit f_{W} est annulé par un polynôme scindé à racines simples.

III.A.3 Raisonner par récurrence sur la dimension de V. Pour l'hérédité, on utilisera les sous-espaces propres de l'un des f_i afin de décomposer V en somme directe de deux sous-espaces stricts A et B, auxquels on appliquera ensuite les résultats des questions III.A.2 et III.A.1.

III.B.1.b Utiliser la question III.A.3.

III.B.2.a Le plus élégant est de l'écrire comme intersection de sous-espaces propres.

III.C.1 On trouvera des conditions nécessaires d'appartenance à $\mathcal{A}_0$ en s'intéressant à la commutation avec $\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{D} & 0 \\ 0 & -\mathrm{D} \end{pmatrix}$, où $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

III.C.3 En utilisant le fait que $\mathcal{E}$ est engendré par

$$f_1 = \mathrm{Diag}(1, 0, -1, 0) \qquad \text{et} \qquad f_2 = \mathrm{Diag}(0, 1, 0, -1)$$

on peut écrire $\mathcal{A}_\lambda = \left\{\mathrm{M} \in \mathcal{A} \,\middle|\, \Phi_{f_1}(\mathrm{M}) = \lambda(f_1)\,\mathrm{M} \wedge \Phi_{f_2}(\mathrm{M}) = \lambda(f_2)\,\mathrm{M}\right\}$.

III.C.4 Utiliser les résultats des questions III.C.1 et III.C.3, ainsi que la description de $\mathcal{A}$ employée lors des calculs effectués à ces occasions.

III.C.5 Noter que l'on a construit au cours des questions précédentes une base de vecteurs propres des endomorphismes Φ_{H} pour $\mathrm{H} \in \mathcal{E}$.

III.C.6.a Exploiter les résultats de la question III.C.3. Comme les sous-espaces $\mathcal{A}_\alpha$, $\mathcal{A}_{-\alpha}$, $\mathcal{A}_\beta$ et $\mathcal{A}_{-\beta}$ sont des droites vectorielles, les choix des couples sont de toute manière assez restreints.

Les conseils du jury

D'après le rapport du jury, « ce sujet était de nature conceptuelle », faisant intervenir diverses techniques de démonstration (par condition nécessaire et suffisante, par contre-exemple, par récurrence sur la dimension d'un sous-espace vectoriel, par chaîne d'implications pour prouver l'équivalence de trois assertions). Il est noté que « les différences entre les candidats ont davantage tenu à la capacité à formuler des raisonnements complets ». Le jury regrette enfin que « les candidats connaissent mal l'usage des quantificateurs – même exprimés en langage courant. »

I. Systèmes de racines

I.A Notons tout d'abord que, comme α est un vecteur non nul, son orthogonal $\{\alpha\}^\perp$ est un hyperplan. Soit maintenant $x \in \mathrm{E}$: comme $\mathrm{E} = \{\alpha\}^\perp \oplus \mathrm{Vect}\,(\alpha)$, il existe $y \in \{\alpha\}^\perp$ et $z \in \mathrm{Vect}\,(\alpha)$ tels que $x = y + z$. Par définition de la réflexion τ_α, on a de plus

$$\tau_\alpha(x) = y - z = x - 2z$$

Cherchons maintenant à exprimer z en fonction de x. Déjà, $z \in \mathrm{Vect}\,(\alpha)$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $z = \lambda\,\alpha$. Ainsi, $y = x - \lambda\,\alpha$. De plus, $y \in \{\alpha\}^\perp$ si bien que

$$\langle \alpha \mid y \rangle = 0 = \langle \alpha \mid x \rangle - \lambda \langle \alpha \mid \alpha \rangle$$

Il en découle que
$$\lambda = \frac{\langle \alpha \mid x \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle} \qquad \text{comme } \langle \alpha \mid \alpha \rangle \neq 0$$

d'où
$$\tau_\alpha(x) = x - 2z = x - 2\lambda\alpha = x - 2\frac{\langle \alpha \mid x \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle}\,\alpha$$

Ainsi,
$$\boxed{\forall\, x \in \mathrm{E} \qquad \tau_\alpha(x) = x - 2\frac{\langle \alpha \mid x \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle}\,\alpha}$$

I.B L'espace E étant de dimension 1, il est de la forme $\mathrm{E} = \mathbb{R}\,e$, avec e un vecteur non nul de E. Soit $\mathcal{R}$ un système de racines de E.

- D'après la propriété 1, cet ensemble est constitué de multiples non nuls de e ; en particulier, comme il est non vide, il en contient au moins un que l'on note α.
- D'après la propriété 3, les seuls éléments de $\mathcal{R}$ colinéaires à α sont α et $-\alpha$. De ce fait, $\mathcal{R}$ contient α et $-\alpha$, et ne peut pas contenir d'autres vecteurs de E puisqu'ils sont tous colinéaires.

Par conséquent, $\mathcal{R}$ est nécessairement de la forme $\{\alpha, -\alpha\}$ avec $\alpha \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0\}$.

Réciproquement, vérifions que les ensembles de cette forme sont effectivement des systèmes de racines. Soit $\mathcal{R} = \{\alpha, -\alpha\}$ avec $\alpha \in \mathrm{E} \smallsetminus \{0\}$.

(1) Cet ensemble $\mathcal{R}$ est bien fini, ne contient pas le vecteur nul et engendre forcément la droite vectorielle E.

(2) Comme τ_α est la réflexion par rapport à $\{\alpha\}^\perp = \{0\}$, on a

$$\tau_\alpha(\alpha) = -\alpha \qquad \text{et} \qquad \tau_\alpha(-\alpha) = \alpha$$

Ainsi $\tau_\alpha(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$. De plus $\tau_{-\alpha} = \tau_\alpha$: il s'ensuit que $\tau_{-\alpha}(\mathcal{R}) = \mathcal{R}$ également.

(3) Les seuls éléments de $\mathcal{R}$ colinéaires à α sont clairement α et $-\alpha$. De même pour les éléments colinéaires à $-\alpha$.

(4) Les seuls couples de $\mathcal{R}^2$ sont (α,α), $(-\alpha,-\alpha)$, $(\alpha,-\alpha)$ et $(-\alpha,\alpha)$. Or

$$\frac{2\langle \alpha \mid \alpha \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle} = \frac{2\langle -\alpha \mid -\alpha \rangle}{\langle -\alpha \mid -\alpha \rangle} = 2 \in \mathbb{Z}$$

et
$$\frac{2\langle \alpha \mid -\alpha \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle} = \frac{2\langle -\alpha \mid \alpha \rangle}{\langle -\alpha \mid -\alpha \rangle} = -2 \in \mathbb{Z}$$

ce qui montre que $\dfrac{2\langle \alpha \mid \beta \rangle}{\langle \alpha \mid \alpha \rangle} \in \mathbb{Z}$ pour tout couple $(\alpha, \beta) \in \mathcal{R}^2$.