CCP Maths 2 PC 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alban Levy (ENS Cachan) ; il a été relu par Tristan Poullaouec (Professeur agrégé) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Ce sujet d'analyse propose l'étude de quelques propriétés de la fonction

$$\mathrm{U}: \begin{cases} \mathbb{R} \smallsetminus (-\mathbb{N}^*) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x \qquad \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \end{cases}$$

et son expression à l'aide d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

- La première partie se concentre sur la fonction U : domaine de définition, dérivabilité, caractère $\mathscr{C}^\infty$, équivalent en l'infini et, enfin, recherche d'une équation fonctionnelle vérifiée par U.
- La deuxième partie propose l'étude de la fonction

$$x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{e}^{-xt}}{\mathrm{e}^{\,t}-1}\,\mathrm{d}t$$

  et de son lien avec U. On établit notamment qu'elles coïncident sur $]-1\,;+\infty[$.
- Dans la dernière partie, on change un peu de fil directeur en calculant des sommes classiques (somme des $1/n^2$, des $1/n^4$ et des $1/n^6$) à partir de la décomposition en série de Fourier de la fonction paire et 2π-périodique égale à $x \longmapsto \pi - x$ sur $[0,\pi]$. On calcule au passage $\mathrm{U}(-1/2)$ et $\mathrm{U}(0)$.

Le sujet ne nécessite que des raisonnements très classiques, sans doute vus et revus pendant l'année. En pareil cas, pour avoir une bonne note, il faut à la fois trouver rapidement les réponses et les rédiger avec soin. Notons qu'elles ne sont pas toujours données par l'énoncé. Il vaut donc mieux prendre son temps et vérifier ses calculs, car une erreur peut en entraîner d'autres en cascade.

INDICATIONS

I.1 Déterminer un équivalent de $u_n(x)$ quand $n \to +\infty$.

I.2.1 Effectuer une récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$.

I.2.2 Utiliser la monotonie de $|u_n^{(p)}|$ pour déterminer sa norme infinie sur $[a, b]$.

I.2.3 Utiliser le théorème de dérivation des séries en travaillant sur un segment.

I.3.1 Couper la somme définissant $\mathrm{U}(x)$ en deux.

I.3.2 Utiliser les théorèmes généraux et la continuité de U sur $]-1, +\infty[$.

I.4 Justifier que la somme $\sum_{n \neq \mathrm{N}} 1/(n+x)^2$ a une limite finie quand $x \to -\mathrm{N}$ puis déterminer le comportement du terme $1/(\mathrm{N}+x)^2$ au voisinage de ce point.

I.5.1 Utiliser l'expression de $\mathrm{U}'(x)$ obtenue à la question I.3.3

I.5.2 Effectuer une comparaison série-intégrale en utilisant le décroissance de u_n.

I.6 Justifier qu'à une constante près, $\mathrm{U}(x/2)$ (resp. $\mathrm{U}\big((x-1)/2\big)$) est la somme des termes d'indices pairs (resp. impairs) de la série définissant $\mathrm{U}(x)$.

II.1.1 Vérifier que $t \longmapsto (\mathrm{e}^{\,t}-1)/t$ (qui est un taux d'accroissement) converge en 0.

II.2.1 Utiliser les théorèmes de comparaisons pour justifier l'intégrabilité de f_0 sur $\mathbb{R}_+$.

II.2.3 Appliquer le théorème de dérivation sous le signe somme en travaillant sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

II.2.4 Utiliser la caractérisation séquentielle de la limite et le théorème de convergence dominée.

II.3.1 Se lancer dans le calcul et faire une intégration par partie.

II.3 Sommer une série télescopique.

II.3.3 Relier les dérivées (p-2)$^{\mathrm{e}}$ de U et φ.

III.2.1 Regarder la parité de g.

III.2.2 Faire une intégration par partie. (Faites attention aux coefficients : $2/\pi$ si vous intégrez entre 0 et π.)

III.3.1 Calculer $g(0)$ avec l'écriture en série de Fourier de g.

III.3.2 Pour déterminer U(0), utiliser la question I.6.

III.4 Penser à Parseval, puis séparer la somme en deux sommes.

III.5.2 Intégrer par partie pour retrouver $a_n(g)$ dans le calcul.

III.5.3 Parseval et l'intégration par partie reviennent pour de nouvelles aventures !

IV Ne vous amusez à calculer la somme des $1/n^8$ que si vous avez terminé tout le sujet en deux heures.

Partie I

I.1 Soit $x \in \mathscr{D}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant |x| + 1$,

$$u_n(x) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1/n^2$$

qui est le terme général d'une série à termes positifs, et convergente. Par comparaison aux séries de Riemann, $\sum u_n(x)$ converge.

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum u_n \text{ converge simplement sur } \mathscr{D}.}$$

I.2.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(p): \qquad \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-n\}\,, \quad u_n^{(p)}(x) = (-1)^p (p+1)!(n+x)^{-(p+2)}$$

est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ (avec la convention que $u_n^{(0)} = u_n$).

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie par définition de u_n.
- $\underline{\mathscr{P}(p) \Longrightarrow \mathscr{P}(p+1)}$: soit $p \in \mathbb{N}$; supposons que la formule est vraie au rang p. Alors pour tout $x \neq -n$,

$$\begin{aligned} u_n^{(p+1)}(x) &= (u_n^{(p)})'(x) \\ &= (-1)^p (p+1)!\big(-(p+2)\big)(n+x)^{-(p+3)} \\ u_n^{(p+1)}(x) &= (-1)^{(p+1)}(p+2)!(n+x)^{-(p+3)} \end{aligned}$$

  Ainsi, $\mathscr{P}(p+1)$ est vérifiée.
- Conclusion : on a montré par récurrence que la propriété $\mathscr{P}(p)$ est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, d'où

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus \{-n\}\,, \qquad u_n^{(p)}(x) = (-1)^p \cdot \frac{(p+1)!}{(n+x)^{p+2}}}$$

I.2.2 Soient $a < b \in \left]-1\,;+\infty\right[$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \longmapsto (n+x)^{-(p+2)}$ étant décroissante sur $]-n, +\infty[$, pour tout $x \in [a, b]$

$$0 \leqslant |u_n^{(p)}(x)| = \frac{(p+1)!}{(n+x)^{p+2}} \leqslant \frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}$$

donc
$$||u_n||_{\infty,[\,a\,;b\,]} = \frac{(p+1)!}{(n+a)^{p+2}}$$

avec
$$\frac{1}{(n+a)^{p+2}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^{p+2}}$$

Comme $p+2 > 2$, le terme de droite est le terme général d'une série de Riemann convergente. D'après le théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum ||u_n||_{\infty,[\,a\,;b\,]}$ converge. On a prouvé que

$$\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ avec } -1 < a < b,\ \forall p \in \mathbb{N}^*,\ \sum u_n^{(p)} \text{ converge normalement sur } [a, b].}$$

I.2.3 Dans les questions I.1 et I.2.2, on a respectivement prouvé que pour tous réels $-1 < a < b$,

- $\sum u_n$ converge simplement sur $[a, b]$,
- $\sum u_n^{(p)}$ converge normalement sur $[a, b]$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Les hypothèses du théorème de série de fonctions de classe $\mathscr{C}^p$ sont bien vérifiées pour tout $p \in \mathbb{N}$. U est donc $\mathscr{C}^\infty$ sur tout intervalle $[a, b] \subset \,]-1, +\infty[$. Le caractère d'être $\mathscr{C}^\infty$ étant une propriété locale, il est vérifié en tout point de $]-1, +\infty[$. Il s'ensuit que

$$\boxed{\text{U est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-1, +\infty[.}$$

I.3.1 Soient $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathscr{D}$. On a alors

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \\
&= \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(x) + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} u_n(x) \\
&= \mathrm{U}_n(x) + \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \\
\mathrm{U}(x) &= \mathrm{U}_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\mathrm{N}+x)^2}
\end{aligned}$$

un changement d'indice assurant la dernière égalité. On en conclut que

$$\boxed{\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathscr{D}, \qquad \mathrm{U}(x) = \mathrm{U}_\mathrm{N}(x) + \mathrm{U}(x + \mathrm{N})}$$

I.3.2 Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$. Comme l'application $x \longmapsto x + \mathrm{N}$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et que U est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$ donc l'est sur $]-1, 0[$, par composition de fonctions $\mathscr{C}^\infty$, $x \longmapsto \mathrm{U}(x+\mathrm{N})$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-\mathrm{N}-1, -\mathrm{N}[$. De plus, U_N est une somme finie de fractions rationnelles de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 0[$. Par suite, elle est également $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, 0[$. On déduit enfin de la question I.3.1 que

$$\boxed{\text{Pour tout } \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*, \text{ U est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur }]-\mathrm{N}-1, -\mathrm{N}[.}$$

Puisque $\mathscr{D}$ est la réunion de $]-1, +\infty[$ et des intervalles de la forme $]-\mathrm{N}-1, -\mathrm{N}[$ pour tous les $\mathrm{N} \geqslant 1$ et que U est $\mathscr{C}^\infty$ sur chacun de ces intervalles d'après l'encadré précédent et la question I.2.3,

$$\boxed{\text{U est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathscr{D}.}$$

I.3.3 Soient $p \in \mathbb{N}, p \geqslant 2, \mathrm{N} \geqslant 1$. Commençons par déterminer une expression de $\mathrm{U}^{(p-2)}$. On est bien sûr amené à inverser sommation et dérivation.

- $\sum u_n$ converge simplement sur $]-\mathrm{N}-1, -\mathrm{N}[$ d'après la question I.1,
- pour tout $k \in \{1, ..., p-2\}$, $\sum u_n^{(k)}$ converge normalement sur tout $[a, b]$ inclus dans $]-\mathrm{N}-1, -\mathrm{N}[$ (on le montre de la même façon qu'à la question I.2.2 par décroissance des fonctions à partir d'un certain rang).