Centrale Physique MP 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Raphaël Galicher (Enseignant-chercheur à l'université) ; il a été relu par Rémy Hervé (Professeur agrégé à l'université) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Le sujet propose une étude du projet Mose (*Modulo Speromentale Electromeccanico*, Module Expérimental Électromécanique). Il s'agit d'un barrage dynamique dont l'objectif est de protéger la ville de Venise des inondations dues aux fortes marées (les *acqua alta*). Le problème est divisé en trois parties indépendantes.

- La première partie propose une étude mécanique du projet (mécanique des systèmes et du solide). Le calcul des moments des forces (poids, poussée d'Archimède) s'exerçant sur le barrage (solide en rotation) permet de définir les positions d'équilibre et leur stabilité en fonction des différents paramètres du problème. Une description dynamique du système permet ensuite de calculer la durée du régime transitoire amenant aux positions d'équilibre. Enfin, l'énoncé analyse en détail deux états particuliers du barrage.
- La deuxième partie propose une étude thermodynamique des compresseurs du projet Mose. D'abord, des transformations isothermes décrivent la phase de compression du gaz dans un caisson de volume donné. L'énoncé sépare cette phase de compression en plusieurs transformations successives et propose un raisonnement pour déterminer le travail à fournir par l'utilisateur. Ensuite, la phase d'évacuation de l'eau est étudiée et le travail à fournir est déterminé.
- Enfin, le phénomène des marées est abordé dans la troisième partie. La notion de champ gravitationnel est introduite, puis utilisée dans un référentiel non galiléen pour étudier qualitativement le phénomène des marées océaniques provoquées par le Soleil et la Lune sur Terre. Une dernière sous-partie, très courte, étudie l'onde de marée qui se propage dans le bassin méditerranéen en utilisant une description d'onde classique de d'Alembert.

Les connaissances nécessaires pour traiter la première partie sont plutôt simples, mais il est important de bien poser le problème pour chaque configuration étudiée. Dans la deuxième partie, l'étude de la phase de compression demande une bonne maîtrise du cours de thermodynamique et surtout une attention soutenue, car presque aucun résultat intermédiaire n'est donné. L'étude de la phase d'évacuation de l'eau est compliquée car l'énoncé demande de reconstruire, sans indication, un raisonnement similaire à celui proposé dans l'étude de la phase de compression. La troisième partie est une application directe du cours. Signalons enfin que ce problème ne fait quasiment appel qu'au programme de sup.

Indications

Étude du projet

I.A.3 Justifier que les champs de pression des deux sous-systèmes de la figure reproduisent le champ de pression du système complet. Appliquer alors le théorème d'Archimède à chaque sous-système.

I.A.4 L'énoncé néglige le poids de l'air devant celui de l'eau, donc il convient de négliger la poussée d'Archimède dans l'air devant celle dans l'eau.

I.A.5.a Remarquer que $\cos\theta$ ne peut pas être nul dans le cas d'un caisson totalement immergé.

I.A.5.b Pour obtenir le domaine d'existence des positions d'équilibre non verticales ne pas oublier que le caisson ne doit pas être totalement immergé.

I.A.5.c Justifier qu'une position d'équilibre est stable si la dérivée par rapport à θ de la somme des moments des forces en O selon Ox est négative.

I.B.1.a L'expression fournie par l'énoncé est erronée. Le deuxième v est un vecteur et non un scalaire

I.B.1.b Une force de frottements s'oppose au mouvement.

I.B.2.a Il y a une erreur d'énoncé : J s'exprime en fonction de λ_{e}, λ_{c}, ℓ et h.

I.B.2.b Pour expliquer le signe de b, analyser la solution de l'équation différentielle pour un caisson lâché sans vitesse initiale.

I.B.3 Approcher la vitesse de remontée par sa valeur en $\theta = 0$.

Étude de la compression et de l'injection de l'air dans le caisson

II.A.1 Lors d'une transformation isotherme d'un gaz parfait, le produit P V est constant. Il y a un unique caisson mais N tuyaux et N cylindres.

II.A.4 Entre CD et AB, étudier les contributions du gaz à gauche et à droite du piston. La contribution du gaz à droite doit être décomposée en deux à cause de l'ouverture des soupapes.

II.A.7.c Une primitive de $\ln x$ est $x\,(\ln x - 1)$.

II.B.1 Il s'agit du nombre de moles refoulées depuis l'instant où la pression du caisson est P_{f}.

II.B.2 Calculer le travail reçu par le gaz pendant un va-et-vient augmentant le volume dans le caisson de $\text{V}_{i+1} - \text{V}_i$. Déterminer l'augmentation du volume à chaque étape $(\text{V}_{i+1} - \text{V}_i)$ et le nombre ν' de va-et-vient des pistons nécessaires pour atteindre le volume V_{f}.

Le phénomènes des marées

III.A.2 La masse est analogue à la charge électrique et la constante $4\,\pi\,\varepsilon_0$ est analogue à $-1/\text{G}$.

III.B.2 Suivre un point de la surface de la Terre sur son plan équatorial au cours du mouvement diurne.

III.B.3 Dessiner les champs appliqués par le Soleil, puis par la Lune et en déduire la forme de la couche océanique.

III.C.3 Estimer la somme de l'onde réfléchie et de l'onde incidente au niveau du détroit de Gibraltar.

Le rapport du jury liste quelques conseils qui sont habituels mais qui prennent tout leur sens dans ce sujet dense et touffu :

- une lecture complète et attentive de l'énoncé est nécessaire pour rechercher à la fois les hypothèses de travail et les valeurs numériques pertinentes ;
- le résultat final doit passer au crible d'un contrôle d'homogénéité dimensionnelle ;
- une définition du système thermodynamique et du référentiel d'étude en mécanique sont absolument nécessaires ;
- enfin, le rapport du jury précise une fois de plus que la falsification manifeste d'un résultat demandé par l'énoncé peut jeter le discrédit sur l'ensemble de la copie.

Projet MOSE

I. Étude du projet

I.A Équilibre en dehors des marées

I.A.1 Le caisson est constitué

- d'une masse $\rho_\mathrm{e}\,\mathrm{S}\,h$ d'eau dont le centre d'inertie $\mathrm{G_e}$ est tel que $\overrightarrow{\mathrm{OG_e}} = h/2\,\overrightarrow{e_\mathrm{Y}}$;
- d'une masse m_c de métal avec un centre d'inertie $\mathrm{G_c}$ repéré par $\overrightarrow{\mathrm{OG_c}} = \ell/2\,\overrightarrow{e_\mathrm{Y}}$.

La position du centre d'inertie G du caisson (métal et eau) est alors

$$(m_\mathrm{c} + \rho_\mathrm{e}\,\mathrm{S}\,h)\,\overrightarrow{\mathrm{OG}} = m_\mathrm{c}\,\overrightarrow{\mathrm{OG_c}} + \rho_\mathrm{e}\,\mathrm{S}\,h\,\overrightarrow{\mathrm{OG_e}}$$

En projetant selon $\overrightarrow{e_\mathrm{Y}}$ et en introduisant les notations de l'énoncé

$$\boxed{\mathrm{OG} = \frac{\lambda_\mathrm{c}\,\ell + \lambda_\mathrm{e}\,h^2/\ell}{2\,(\lambda_\mathrm{c} + \lambda_\mathrm{e}\,h/\ell)}}$$

Comme l'explique le rapport du jury, pour étudier les positions d'équilibre d'un caisson en rotation autour d'un axe, il est nécessaire de déterminer au préalable les moments du poids et des forces de pression. Il note également que l'évaluation des actions mécaniques des forces de pression est ici délicate, car le caisson peut être totalement ou partiellement immergé.

I.A.2 Le poids du système {caisson+eau} s'applique en G et son moment $\mathrm{M}_x(\overrightarrow{\mathrm{P}})$ selon $\overrightarrow{e_x}$ en O est

$$\mathrm{M}_x(\overrightarrow{\mathrm{P}}) = (\overrightarrow{\mathrm{OG}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{P}})\cdot\overrightarrow{e_x} = -\mathrm{OG}\,(\lambda_\mathrm{c}\,\ell + \lambda_\mathrm{e}\,h)\,g\,(\overrightarrow{e_\mathrm{Y}} \wedge \overrightarrow{e_z})\cdot\overrightarrow{e_x}$$

En utilisant $(\overrightarrow{e_{\rm Y}} \wedge \overrightarrow{e_z}) \cdot \overrightarrow{e_x} = \cos\theta$ et l'expression de OG, il vient

$$\boxed{\mathrm{M}_x(\overrightarrow{\mathrm{P}}) = -\frac{1}{2}\, g\, \left(\lambda_{\rm c}\,\ell^2 + \lambda_{\rm e}\,h^2\right)\, \cos\theta}$$

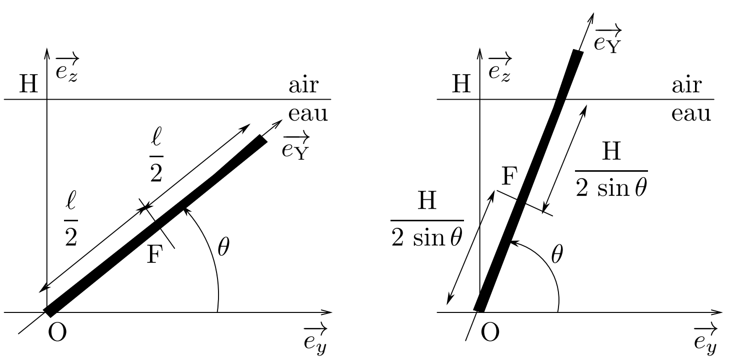
> On vérifie que si $\theta = \pi/2$ alors le moment en O de la force est nul car, dans ce cas, le vecteur représentant le poids pointe vers O.

I.A.3 Selon le théorème d'Archimède, la résultante des forces de pression qui s'exercent sur un système immergé dans un fluide au repos s'identifie à l'opposé du poids du fluide déplacé appliqué au centre de gravité de ce fluide.

Ici, l'interface entre les fluides 1 et 2 est de masse nulle, ce qui implique que les forces de pression appliquées de part et d'autre de cette interface s'équilibrent. La somme des forces de pression qui s'exercent sur Σ est alors égale à la somme des forces de pression s'exerçant sur les systèmes constitués respectivement de fluide 2 (figure centrale) et de fluide 1 (figure de droite). D'après le théorème d'Archimède, il vient que **la somme des forces de pression qui s'exercent sur Σ est égale à l'opposé de la somme des poids des deux fluides déplacés.**

Comme les poids des deux fluides déplacés s'appliquent aux centres de masse de ces fluides et que le système est à l'équilibre, **la somme des moments des forces de pression qui s'exercent sur Σ est égale à l'opposé de la somme des moments des poids des deux fluides déplacés.**

I.A.4 D'après la question précédente, le moment $\mathrm{M}_{\mathrm{O}x}(\overrightarrow{f_{\rm p}})$ en O selon $\overrightarrow{e_x}$ des forces de pression qui s'exercent sur le caisson est égal à la somme des moments en O selon $\overrightarrow{e_x}$ des poids des deux fluides déplacés qui s'appliquent aux centres de masse respectifs de chacun. Or, l'énoncé néglige la masse de l'air devant celle de l'eau. Seul le moment du poids de l'eau déplacée intervient dans l'expression de $\mathrm{M}_{\mathrm{O}x}(\overrightarrow{f_{\rm p}})$. Ce poids s'applique au point F défini sur les schémas suivants.



Si le caisson est totalement immergé (schéma de gauche), le volume d'eau déplacée est $\mathrm{S}\,\ell$ et $\overrightarrow{f_{\rm p}}$ s'applique en F tel que $\overrightarrow{\rm OF} = \ell/2\,\overrightarrow{e_{\rm Y}}$. Il vient

$$\mathrm{M}_{\mathrm{O}x}(\overrightarrow{f_{\rm p}}) = (\overrightarrow{\rm OF} \wedge \overrightarrow{f_{\rm p}}) \cdot \overrightarrow{e_x} = \frac{\ell}{2}\, g\,\rho_{\rm e}\,\mathrm{S}\,\ell\,\cos\theta$$

Si le caisson est partiellement immergé, le volume d'eau déplacée est $\mathrm{S\,H}/\sin\theta$ et la force $\overrightarrow{f_{\rm p}}$ s'applique en F tel que $\overrightarrow{\rm OF} = \mathrm{H}/\left(2\,\sin\theta\right)\,\overrightarrow{e_{\rm Y}}$. On a alors

$$\mathrm{M}_{\mathrm{O}x}(\overrightarrow{f_{\rm p}}) = (\overrightarrow{\rm OF} \wedge \overrightarrow{f_{\rm p}}) \cdot \overrightarrow{e_x} = \frac{\rm H}{2\,\sin\theta}\, g\,\rho_{\rm e}\,\mathrm{S}\,\frac{\rm H}{\sin\theta}\,\cos\theta$$