Mines Maths 2 MP 2010 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Pauline Tan (ENS Cachan) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce problème, mêlant dénombrement, analyse et algèbre, porte sur les matrices binaires, c'est-à-dire à coefficients dans $\{0\,;1\}$, et plus précisément sur l'ensemble noté $\mathscr{U}_n$ de celles d'ordre n dont la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne vaut 2. Il se compose de quatre parties.

- Dans la première, on établit des résultats utiles dans la suite. On détermine en particulier un vecteur propre commun à toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$ puis on calcule la somme de tous les éléments de $\mathscr{U}_n$.
- La deuxième partie commence par des questions assez fines de dénombrement, qui aboutissent à une relation de récurrence satisfaite par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des cardinaux des ensembles $\mathscr{U}_n$. On étudie ensuite la somme de la série entière $\sum u_n\,x^n/(n!)^2$ à l'aide d'une équation différentielle.
- La troisième partie a pour finalité d'établir un équivalent du cardinal de $\mathscr{U}_n$ quand n tend vers l'infini. On y exprime les coefficients de la série entière introduite précédemment, à l'aide de la fonction Γ, et on obtient des équivalents de ces coefficients.
- Dans la quatrième partie, on calcule le rang de la famille $\mathscr{U}_n$ d'abord pour des petites valeurs de n puis dans le cas général, en utilisant des raisonnements d'algèbre linéaire et de dénombrement.

C'est un sujet intéressant, d'autant plus qu'il aborde des domaines variés du programme de MPSI et MP (allant du dénombrement à la réduction en base orthonormée en passant par les séries entières et les intégrales généralisées). Les parties de dénombrement sont amusantes et peuvent sembler plus faciles que celles d'analyse. Néanmoins, il faut se méfier des questions pour lesquelles l'intuition du résultat vient aisément, sans que l'on ait établi une démonstration rigoureuse : seuls les candidats ayant défini proprement des bijections pour établir les égalités des cardinaux obtiennent la totalité des points. Dans l'ensemble, les questions d'analyse sont classiques, à l'exception peut-être de la question 14 qui nécessite des majorations assez délicates pour démontrer l'équivalence demandée.

Indications

A. Questions préliminaires

3 Étudier les cas $n = 2$ et $n = 3$ pour avoir une idée du résultat. Puis, pour chaque couple $(i, j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, introduire l'application qui échange les lignes 1 et i et les colonnes 1 et j d'une matrice de $\mathscr{U}_n$.

B. Étude du cardinal de $\mathscr{U}_n$

4 Calculer $\mathrm{S}_n\,\mathrm{X}_0$ de deux manières en utilisant les questions 2 et 3.

5 Partitionner l'ensemble $\mathscr{H}_n$ en $(n-1)^2$ sous-ensembles en fonction des positions comportant un 1 sur la première ligne et la première colonne.

6 Suivre l'indication de l'énoncé. Établir une bijection entre $\mathscr{U}_{n-2}$ et l'ensemble des matrices de $\mathscr{K}_n$ qui comportent un 1 en position $(2, 2)$ d'une part, entre $\mathscr{K}_{n-1}$ et l'ensemble des matrices de $\mathscr{K}_n$ qui comportent un 0 en position $(2, 2)$ d'autre part.

7 Utiliser les résultats des questions 4, 5 et 6.

8 Procéder par l'absurde pour démontrer que $\sum w_n$ diverge.

9 Faire appel à la relation de récurrence trouvée à la question 7.

C. Équivalent d'une suite de coefficients d'un développement en série entière

11 Utiliser le développement en série entière d'une fonction usuelle et la formule satisfaite par la fonction Γ rappelée dans l'énoncé.

14 Se servir du résultat de la question 13 et majorer la différence des deux intégrales qui doivent être équivalentes à l'aide d'une intégration par parties.

15 Utiliser le résultat de la question 14 et faire apparaître $\Gamma(n+\beta)$ par un changement de variable affine.

16 Appliquer ce qui précède avec $\alpha = -1/2$ et $\beta = 1/2$.

D. Étude de rang

17 Suivre l'indication de l'énoncé. Que peut-on dire de la somme des coefficients d'une relation de dépendance linéaire de $\mathscr{U}_3$?

18 Si λ est une valeur propre de A associée au vecteur propre X_0, calculer $\lambda\,{}^t\mathrm{X}_0\,\mathrm{X}_0$ de deux façons.

19 En notant P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ à une base orthonormée dont le premier vecteur est colinéaire à X_0, vérifier qu'une matrice B est dans $\mathscr{V}_n$ si et seulement si ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{B}\,\mathrm{P}$ a une certaine forme.

20 Pour minorer r'_n, construire une famille libre de $(n-1)^2$ matrices en adaptant la construction de B avec d'autres lignes et d'autres colonnes.

Les conseils du jury

Commençons par quelques remarques générales sur le sujet issues du rapport du jury. Dans celui-ci, le rapporteur compare une épreuve de mathématiques à « une sorte de jeu de piste dans lequel, partant d'une question souvent simple, l'auteur s'efforce d'orienter le candidat vers la réponse en fournissant une série d'indices qui doivent lui permettre de se diriger à l'aide de ses connaissances du cours et de sa perspicacité. » À l'opposé de toute incitation au « bachotage stérile dont sont accusées régulièrement les classes préparatoires », le sujet propose une « continuité dans la réflexion », contribuant ainsi « à la mise en œuvre [des] connaissances, au développement de l'esprit scientifique et à l'initiation à la démarche de recherche. » Dans cet objectif figurent « plusieurs questions ponctuelles » permettant « aux étudiants désorientés de faire au moins valoir leur connaissance du cours et leur capacité à résoudre des exercices particuliers » et « de nombreuses questions ouvertes » mobilisant les « capacités de réflexion [des candidats] pour faire usage des informations [...] fournies par les questions précédentes du problème. » En conclusion, le rapport explique les qualités attendues chez les étudiants pour réussir cette épreuve. « Ce problème a donné à de nombreux candidats l'opportunité de faire montre de la connaissance de leur cours et ils en ont été récompensés. Mais plus encore l'ont été ceux qui ont su suivre quelques bouts du chemin qui leur était tracé en faisant le lien entre les différentes questions. »

A. Questions préliminaires

1 Par définition, $\mathscr{U}_n$ est l'ensemble des matrices réelles à n lignes et n colonnes, à coefficients dans $\{0\,;1\}$, comportant exactement deux 1 dans chaque ligne et dans chaque colonne. Notons dès à présent qu'une caractérisation des matrices de $\mathscr{U}_n$ est : pour toute matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, A appartient à $\mathscr{U}_n$ si, et seulement si, tous ses coefficients sont dans $\{0\,;1\}$ et la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne vaut 2. En particulier, l'ensemble $\mathscr{U}_2$ est un singleton car la seule matrice à deux lignes et deux colonnes vérifiant ces conditions est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

$$\boxed{\mathscr{U}_2 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right\}}$$

Déterminons maintenant les éléments de $\mathscr{U}_3$. La première ligne d'une matrice de $\mathscr{U}_3$ doit contenir deux 1 et un 0. Précisons d'abord les matrices de $\mathscr{U}_3$ dont la première ligne est $(0,1,1)$. La première colonne d'une telle matrice est nécessairement $(0,1,1)$. Ainsi, il y a deux possibilités :

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

De même, il y a exactement deux matrices de $\mathscr{U}_3$ dont la première ligne est $(1,0,1)$, puisqu'alors la deuxième colonne ne peut être que $(0,1,1)$, ce sont

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

En procédant de la même façon pour les matrices dont la première ligne est $(1,1,0)$, on conclut que les matrices de $\mathscr{U}_3$ sont

$$\boxed{\begin{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}}$$

En conséquence, $\boxed{u_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad u_3 = 6}$

2 Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{U}_n$. Notons $\mathrm{Y}_0 = (y_i)_{1\leqslant i\leqslant n} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}_0$. Soit $i \in [\![1\,;\,n]\!]$.

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \times 1 = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

Comme A est un élément de $\mathscr{U}_n$, la somme des coefficients d'une même ligne de A vaut 2. Par suite, $y_i = 2$ pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$. Ainsi, $\mathrm{A}\,\mathrm{X}_0 = \mathrm{Y}_0 = 2\,\mathrm{X}_0$. Finalement, X_0 étant non nul,

$$\boxed{\mathrm{X}_0 \text{ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 2.}}$$

> Cette question est très classique. Plus généralement, pour tout réel λ, on peut démontrer que X_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de toute matrice dont la somme des coefficients de chaque ligne vaut λ.

3 Notons S_n la somme de toutes les matrices de $\mathscr{U}_n$. Commençons par observer que, pour $n = 2$, on trouve

$$\mathrm{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{J} = h_2\,\mathrm{J}$$

puisque $h_2 = u_2 = 1$. Pour $n = 3$,

$$\mathrm{S}_3 = 4\,\mathrm{J} = h_3\,\mathrm{J}$$

car $h_3 = 4$ d'après la question 1.

Revenons à présent au cas général. Parmi les u_n matrices de $\mathscr{U}_n$, un nombre h_n d'entre elles comportent un 1 en position $(1,1)$ et les $u_n - h_n$ autres ont un 0 dans cette position. Le coefficient de S_n en position $(1,1)$ est donc égal à h_n. Démontrons que les autres coefficients de S_n ont la même valeur, c'est-à-dire que pour tout couple (i,j) d'entiers compris entre 1 et n, il y a exactement h_n matrices de $\mathscr{U}_n$ qui comportent un 1 en position (i,j). À cette fin, fixons un couple $(i,j) \in [\![1\,;\,n]\!]^2$ et introduisons l'application $\tau_{i,j}$ définie sur $\mathscr{U}_n$ qui à une matrice A associe la matrice B obtenue à partir de A en échangeant la ligne 1 et la ligne i puis la colonne 1 et la colonne j. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{U}_n$, $\tau_{i,j}(\mathrm{A})$ est également dans $\mathscr{U}_n$ et

$$\tau_{i,j}\big(\tau_{i,j}(\mathrm{A})\big) = \mathrm{A}$$

On constate ainsi que ${\tau_{i,j}}^2$ est égale à l'identité, donc $\tau_{i,j}$ est inversible et réalise une bijection sur l'ensemble fini $\mathscr{U}_n$, c'est-à-dire une permutation de $\mathscr{U}_n$. Notons aussi que