Mines Maths MPSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sophie Rainero (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Denis Conduché (ENS Ulm) et Vincent Puyhaubert (Professeur en CPGE).

Ce sujet est composé de deux problèmes indépendants, l'un d'analyse et l'autre d'algèbre, chacun abordant de nombreux points du programme de première année.

- Le problème d'analyse est constitué de quatre parties globalement indépendantes. Dans la première, on effectue une classique étude de fonction : variations, branches infinies, tracé de courbe, développement limité. Dans la deuxième, on résout une famille d'équations différentielles en faisant un raccordement de solutions. La troisième partie consiste en l'étude de deux suites définies implicitement. Enfin, la quatrième partie propose d'étudier et de tracer une courbe paramétrée.
- Le problème d'algèbre, plus long et plus difficile, porte principalement sur les polynômes. Après avoir déterminé les racines d'un polynôme de degré 2, on étudie deux hyperboles définies à l'aide de ce polynôme, pour lesquelles on trouve des équations réduites par la méthode de Descartes. Puis on définit un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[X]$ des polynômes à coefficients complexes faisant intervenir la division euclidienne. Dans un premier temps, cette application linéaire est étudiée dans des cas particuliers (recherche de sa matrice, de son image, de son noyau). On s'intéresse ensuite à la structure de son noyau dans le cas général. La dernière partie de ce problème est consacrée à l'étude d'un produit scalaire.

L'intérêt principal de cette épreuve est d'aborder de nombreuses notions du programme de MPSI : elle constitue donc un excellent outil de révision. On peut cependant regretter un manque apparent de concertation entre les concepteurs de l'épreuve commune et ceux de cette épreuve spécifique, dont la conséquence est une ressemblance très forte entre les deux sujets (courbes paramétrées, équations différentielles avec raccordement de solutions, suites définies implicitement dont on détermine des équivalents, hyperboles équilatères...). À part la quatrième partie du deuxième problème, ce sujet est extrêmement calculatoire.

Indications

Problème 1

6 Mettre l'équation différentielle sous forme résolue.

7 Chercher une solution particulière constante.

8 Raisonner par analyse-synthèse en utilisant le résultat de la question 7.

12.c Utiliser la croissance stricte de la fonction f_{n+1} et les résultats des questions 10 et 12.b.

13.b Déterminer deux limites différentes pour la suite de terme général $n\ \ln(u_n)$ à l'aide des questions 12.d et 13.a.

14.b Étudier la limite quand t tend vers $+\infty$ du quotient $y(t)/x(t)$.

14.c Former des développements limités à l'ordre 3 des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ au voisinage de 1.

Problème 2

17.b.ii Effectuer un changement de repère pour reconnaître une hyperbole équilatère.

21 Utiliser la question 16.b et exprimer les racines carrées de $2\,\mathrm{i}$.

23 Le déterminant de f_3 est égal à celui de sa matrice dans la base $(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2, \mathrm{X}^3)$ de $\mathbb{C}_3[\mathrm{X}]$.

25.b Penser au théorème du rang afin de connaître la dimension de $\mathrm{Im}\,(f_3)$.

30.a Que peut-on dire d'une partie non vide de $\mathbb{N}$?

30.b Effectuer la division euclidienne de P_1 par P_0 et démontrer par l'absurde que le reste est nul.

30.c Procéder comme à la question 30.b.

31 Utiliser la question 25.a.

Problème 1

I. Étude d'une fonction

1 La fonction $x \mapsto -x^2$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, la fonction exponentielle est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc, par composition, la fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On en déduit par produit puis différence que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\,\mathrm{e}^{-x^2} + 3\,x\,(-2\,x)\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ &= 3\,\left(1 - 2\,x^2\right)\,\mathrm{e}^{-x^2} \\ f'(x) &= 3\,\left(1 - \sqrt{2}\,x\right)\,\left(1 + \sqrt{2}\,x\right)\,\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

La dérivée de f s'annule ainsi en $-\sqrt{2}/2$ et en $\sqrt{2}/2$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) > 0 \iff x \in \left] -\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2} \right[$$

Par conséquent,

> La fonction f est strictement décroissante sur les intervalles $\left]-\infty\,; -\sqrt{2}/2\right]$ et $\left[\sqrt{2}/2\,; +\infty\right[$ et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\sqrt{2}/2\,; \sqrt{2}/2\right]$.

Déterminons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, c'est-à-dire en $-\infty$ et $+\infty$. Les croissances comparées des fonctions exponentielle et puissances permettent d'écrire

$$\lim_{x\to-\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} x\,\mathrm{e}^{-x^2} = 0$$

d'où
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -1}$$

On peut désormais donner le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}/2$		0		$\sqrt{2}/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f\left(-\sqrt{2}/2\right)$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	$f\left(\sqrt{2}/2\right)$	$\searrow$	-1

où
$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{\mathrm{e}}} - 1$$

et
$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}\,\exp\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{\mathrm{e}}} - 1$$

Précisons maintenant les branches infinies de f. Notons C_f la courbe représentative de f. D'après les limites calculées précédemment et l'étude des variations de f,

> La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à C_f en $-\infty$ et $+\infty$; de plus la courbe est au-dessous de son asymptote en $-\infty$ et au-dessus de son asymptote en $+\infty$.

2 L'application f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et y est donc en particulier deux fois dérivable. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f''(x) &= 3\,(-2\,x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-2\,x^2\right) + 3\,\mathrm{e}^{-x^2}\,(-4\,x) \\ &= -6\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(1-2\,x^2+2\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) = 6\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(2\,x^2-3\right)}$$

Au voisinage de 0, la fonction $x \mapsto 6\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(2\,x^2-3\right)$ est de signe constant, strictement négatif. La fonction f'' a donc le même signe que l'application identité et elle s'annule ainsi en 0 en changeant de signe, ce qui signifie que

$$\boxed{\text{Le point de } C_f \text{ d'abscisse } 0 \text{ est un point d'inflexion.}}$$

> Plus précisément,
>
> $$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \qquad f''(x) &= 6\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(2\,x^2-3\right) \\ &= 6\,x\,\mathrm{e}^{-x^2}\left(\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$
>
> On en déduit le signe de la fonction f'' :
>
> | x | $-\infty$ | | $-\sqrt{3/2}$ | | 0 | | $\sqrt{3/2}$ | | $+\infty$ |
> |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
> | $f''(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
>
> Les points de C_f d'abscisses $-\sqrt{3/2}$, 0 et $\sqrt{3/2}$ sont des points d'inflexion, f est strictement convexe sur les intervalles $\left]-\sqrt{3/2}\,;0\right[$ et $\left]\sqrt{3/2}\,;+\infty\right[$ et strictement concave sur les intervalles $\left]-\infty\,;-\sqrt{3/2}\right[$ et $\left]0\,;\sqrt{3/2}\right[$.

3 La fonction f étant dérivable en 0, sa courbe représentative C_f admet au point d'abscisse 0 une tangente d'équation

$$y = f'(0)\,x + f(0)$$

c'est-à-dire $\boxed{y = 3\,x - 1}$

Étudions la position de la courbe C_f par rapport à cette tangente. Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x) - (3\,x-1) &= 3\,x\,\mathrm{e}^{-x^2} - 1 - 3\,x + 1 \\ &= 3\,x\,(\mathrm{e}^{-x^2}-1) \end{aligned}$$