# X/ENS Maths PSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Lévy (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Guillaume Dujardin (Chercheur à l'INRIA) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

---

Ce sujet traite du rayon spectral $\rho$ et d'une notion proche, le rayon numérique $r$, des matrices carrées à coefficients complexes. En particulier, on montre que le rayon numérique définit une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et que $4r$ est même une norme matricielle sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Dans le préambule, on admet la version hermitienne du théorème spectral : toute matrice hermitienne H est diagonalisable et la matrice de passage peut être choisie unitaire. De plus, les valeurs propres de H sont réelles.

- La première partie établit le principe du min-max ou théorème de Courant-Fischer, qui permet d'exprimer les valeurs propres d'une matrice A en fonction des scalaires $\dfrac{x^*\mathrm{A}x}{x^*x}$ où $x \in \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ et $x^*$ est la transposée du conjugué de $x$. Ce principe est utilisé ensuite pour comparer les valeurs propres d'une somme $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ de deux matrices aux valeurs propres de A et de B.
- Dans la deuxième partie, on étudie l'ensemble des valeurs prises par $\dfrac{x^*\mathrm{A}x}{x^*x}$ lorsque la matrice A est fixée et le vecteur $x$ parcourt $\mathbb{C}^n \smallsetminus \{0\}$. On calcule précisément cet ensemble lorsque la matrice A est hermitienne. On montre que cet ensemble est toujours compact, que A soit hermitienne ou non. Enfin, on montre que la matrice A est nulle si et seulement si cet ensemble est réduit à $\{0\}$.
- La troisième partie traite essentiellement des propriétés des convexes de $\mathbb{C}$. On montre en particulier que la projection orthogonale sur un convexe fermé non vide est unique. Cette étude est utilisée pour comparer le rayon numérique aux normes subordonnées classiques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dans la partie suivante.
- La quatrième partie utilise les résultats obtenus dans les trois précédentes pour montrer que $r$ est une norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et que $4r$ est une norme matricielle.

C'est un sujet plutôt long, intéressant et qui permet d'aborder un bon nombre de résultats classiques et élégants, notamment le théorème de Courant-Fischer et les projections sur les convexes.

La difficulté est progressive : il est préférable de traiter les parties dans l'ordre. Cependant, comme les résultats intermédiaires sont donnés, on peut parfaitement sauter une question en admettant la réponse, ce qui permet de ne pas rester bloqué.

# Indications

## Première partie

3-a Que vaut $\dim(\mathrm{F} + \mathrm{Vect}\,(v_k, \ldots, v_n))$ ?

3-b Décomposer $x$ dans la base $(v_1, \ldots, v_n)$ et utiliser le fait qu'il s'agit d'une base orthonormée.

3-c Construire F à partir des $v_i$.

3-d Utiliser les questions 3-b et 3-c.

3-e Utiliser la question 3-d et encadrer, pour tout vecteur $x \in \mathbb{C}^n$ non nul, $\dfrac{x^*\mathrm{B}x}{x^*x}$ par des valeurs propres de B.

## Deuxième partie

4-a Penser aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

4-d Utiliser la question 3-d.

4-e Utiliser les questions 4-c et 4-d.

4-f Penser aux barycentres.

4-h Utiliser les questions 4-f et 4-g.

4-i Que sait-on des fonctions continues sur un compact ?

5-b-i Utiliser les questions 4-d et 5-a.

5-b-ii Commencer par montrer l'égalité des dimensions, puis calculer $(x+y)^*\mathrm{A}(x+y)$ avec $x \in \mathrm{Ker}\ \mathrm{A}$ et $y \in \mathbb{C}^n$.

5-b-iii Raisonner par l'absurde et remarquer, en utilisant la question 5-b-ii, que si $\mathrm{A}x$ est non nul alors il n'est pas dans le noyau de A. Qu'en déduit-on sur les matrices $\mathrm{A}^p$ ?

## Troisième partie

6-a Calculer le noyau de A.

6-b Que peut-on dire de la matrice $\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n$ lorsque $\lambda$ est une valeur propre de A ?

7-b Considérer l'intersection de toutes les parties convexes de $\mathbb{C}$ qui contiennent l'ensemble X.

7-c Montrer que cet ensemble est un convexe contenant X et contenu dans tout convexe contenant X.

7-d Pour l'existence, utiliser une fonction continue sur un compact inclus dans K. Pour l'unicité, raisonner par l'absurde et faire un dessin.

7-e Faire à nouveau un dessin et penser au produit scalaire canonique du plan complexe.

7-f Se ramener au cas $z_0 \in \mathbb{R}^+$ en effectuant une rotation.

8-a Utiliser la question 7-f.

8-b Utiliser la question 7-c.

8-c Utiliser les questions 6-b, 4-b et 4-h.

8-d Utiliser la question 8-a.

8-e Montrer que si $z \in \mathcal{V}(\mathrm{A})$ alors $0 \in \mathcal{V}(\mathrm{A} - z\mathrm{I}_n)$ et utiliser la question 8-d.

**Quatrième partie**

9-a C'est du cours.

9-b Considérer un vecteur propre adéquat.

9-c-i Utiliser la question 4-d.

9-c-ii Utiliser la question 7-c.

10-a Utiliser les questions 4-c et 5-b.

10-b Pour A et B, utiliser les vecteurs $\begin{pmatrix} t \\ \mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,\theta} \end{pmatrix}$. Pour AB, utiliser la question 4-h.

10-c Pour la majoration, penser à une inégalité faisant intervenir normes et produits scalaires ou hermitiens.

Dans le cas où A est hermitienne, utiliser les questions 4-h et 9-b. Si A est anti-hermitienne, que peut-on dire de iA ?

10-d Utiliser les inégalités triangulaires pour $|||\bullet|||_2$ et $r$, la question précédente et la question 4-c.

10-e Ne pas oublier le résultat de la question 9-a.

10-f Pour le cas $c < 4$, s'inspirer des matrices de la question 10-b.

## Première partie

**1** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Calculons les polynômes caractéristiques des matrices $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\alpha)$ et $\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{B}(\alpha)$.

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{A}(\alpha)} &= \det(\mathrm{A}(\alpha)-\mathrm{XI}_2)\\ &= \det\begin{pmatrix}1-\alpha-\mathrm{X} & 1\\ \alpha(1-\alpha)-1 & \alpha-\mathrm{X}\end{pmatrix}\\ &= (1-\alpha-\mathrm{X})(\alpha-\mathrm{X})-(\alpha(1-\alpha)-1)\end{aligned}$$

soit $$\chi_{\mathrm{A}(\alpha)} = \mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$$

> Pour vérifier le calcul, on peut s'assurer que le coefficient dominant de $\chi_{\mathrm{A}(\alpha)}$ vaut $(-1)^n$, que son coefficient d'ordre $n-1$ vaut $(-1)^{n-1}\,\mathrm{Tr}\,\mathrm{A}(\alpha)$ et que son coefficient constant vaut $\det \mathrm{A}(\alpha)$, où $n$ désigne la taille de la matrice $\mathrm{A}(\alpha)$, c'est-à-dire, ici, 2.
>
> Selon votre professeur, vous avez appris que le polynôme caractéristique d'une matrice A est égal à $\det(\mathrm{A}-\mathrm{XI}_n)$ ou bien à $\det(\mathrm{XI}_n-\mathrm{A})$. Ces deux définitions sont quasi-identiques et ne diffèrent que d'un facteur $(-1)^n$ : $\det(\mathrm{A}-\mathrm{XI}_n) = (-1)^n \det(\mathrm{XI}_n-\mathrm{A})$.

Le discriminant de ce polynôme vaut $-3$ et ses racines sont donc $(1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2$ et $(1-\mathrm{i}\sqrt{3})/2$. Les valeurs propres d'une matrice étant les racines de son polynôme caractéristique, on en tire

$$\boxed{\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}(\alpha)) = \left\{\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

De la même manière,

$$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{B}(\alpha)} &= \det\begin{pmatrix}1+\alpha-\mathrm{X} & 1\\ -\alpha(1+\alpha)-1 & -\alpha-\mathrm{X}\end{pmatrix}\\ &= (1+\alpha-\mathrm{X})(-\alpha-\mathrm{X})-(-\alpha(1+\alpha)-1)\end{aligned}$$

soit $$\chi_{\mathrm{B}(\alpha)} = \mathrm{X}^2-\mathrm{X}+1$$

On retrouve le même polynôme caractéristique, qui possède les mêmes racines.

$$\boxed{\mathrm{sp}\,(\mathrm{B}(\alpha)) = \left\{\frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right\}}$$

Pour finir, $$\begin{aligned}\chi_{\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{B}(\alpha)} &= \det\begin{pmatrix}2-\mathrm{X} & 2\\ -2\alpha^2-2 & -\mathrm{X}\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{X}^2-2\mathrm{X}+4(1+\alpha^2)\end{aligned}$$

Le discriminant de ce dernier polynôme vaut $4(1-4(1+\alpha^2))$, qui est toujours strictement négatif. Ses racines sont $1+\mathrm{i}\sqrt{-1+4(1+\alpha^2)}$ et $1-\mathrm{i}\sqrt{-1+4(1+\alpha^2)}$.

$$\boxed{\mathrm{sp}\,(\mathrm{A}(\alpha)+\mathrm{B}(\alpha)) = \{1+\mathrm{i}\sqrt{4(1+\alpha^2)-1}\ ,\ 1-\mathrm{i}\sqrt{4(1+\alpha^2)-1}\}}$$