E3A Maths A PSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jules Svartz (ENS Cachan) ; il a été relu par Silvère Gangloff (ENS Ulm) et Sophie Rainero (Professeur en CPGE).

Cette épreuve propose de calculer de trois manières différentes l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

Elle fait appel à une large part du programme d'analyse des deux années de prépa. Bien que long et demandant parfois une certaine technicité dans les calculs, l'énoncé est rédigé de manière à ce que les questions à l'intérieur d'une même partie s'enchaînent très facilement, de sorte que l'on n'est jamais pris au dépourvu.

Après des « applications simples du cours » et des « préliminaires » qui seront utiles par la suite, trois parties indépendantes présentent chacune une façon de calculer I.

- La partie d'applications du cours permettait aux correcteurs de s'assurer que le candidat maîtrisait la formule de Green-Riemann et son application au calcul de l'aire délimitée par un arc fermé et sans point double. Les chapitres associés à ces concepts sont en général les moins bien connus ; remarquons cependant que la formule de Green-Riemann est rappelée et que les questions sont simples et bien introduites.
- La partie préliminaire établit une inégalité de convexité sur la fonction sinus et montre que l'intégrale I est bien définie. Ses questions, très classiques, ne devraient pas poser de problème à un candidat sérieusement préparé.
- La première partie propose l'intégration d'un champ de vecteurs sur un contour bien choisi pour en déduire la valeur de I.
- La deuxième partie est abordable avec le programme de première année, mais elle nécessite de la rigueur sur les développements limités et les prolongements de fonctions.
- Enfin, la dernière partie propose d'évaluer de deux manières une intégrale double pour en déduire une troisième fois la valeur de I.

Ce sujet, bien qu'élémentaire, est assez long pour une épreuve de trois heures. Il constitue un bon entraînement sur les fonctions de plusieurs variables, les intégrales curvilignes et les intégrales doubles.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Indications

Applications simples du cours

A.1.2 Utiliser le paramétrage

$$p\colon \begin{cases} [\,-1\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad t \quad \longmapsto \begin{cases} (t^2,-t) & \text{si } t\in[\,-1\,;0\,] \\ (t,t^2) & \text{si } t\in\,]\,0\,;1\,] \end{cases} \end{cases}$$

En notant $p=(p_1,p_2)$, on a alors

$$\int_\gamma \mathrm{V} = \int_{-1}^{0} \Big(\mathrm{P}(p_1(t),p_2(t))p_1'(t)+\mathrm{Q}(p_1(t),p_2(t))p_2'(t)\Big)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \Big(\mathrm{P}(p_1(t),p_2(t))p_1'(t)+\mathrm{Q}(p_1(t),p_2(t))p_2'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

A.2.1 Appliquer la formule de Green-Riemann.

A.3.1 Ici encore, c'est une conséquence de la formule de Green-Riemann.

A.3.2 Les points singuliers sont définis par l'annulation du vecteur $\gamma'(t)$. Penser à réduire le domaine d'étude, avant de représenter graphiquement l'arc.

A.3.3 Utiliser la question A.3.1.

Préliminaires

P.2.1 Effectuer un développement limité à l'ordre de 1 de sin en 0.

P.2.2 Effectuer une intégration par parties, en intégrant $t\mapsto \sin t$ et en dérivant $t\mapsto 1/t$.

P.2.3 Utiliser le fait que $t\mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

Partie I

I.2 Utiliser la question P.2.1, et ne pas avoir peur de se lancer dans les calculs !

I.3.2 Utiliser le théorème de continuité sous le signe intégral.

I.3.3 Minorer la fonction sinus par $t\mapsto 2\pi/t$.

I.4.2 Sur un segment horizontal contenu dans l'axe $(\mathrm{O}x)$, paramétrer par l'abscisse.

I.4.4 Décomposer l'intégrale $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{V}$ en l'intégrale sur chacun des morceaux γ_i, puis utiliser les résultats des questions I.4.2 et I.4.3. Faire ensuite tendre r vers 0 et R vers $+\infty$, en utilisant les résultats des questions I.3.2 et I.3.3.

Partie II

II.1.1 En procédant par développements limités au voisinage de zéro, montrer que les intégrandes se prolongent en des fonctions continues sur $[\,0\,;\pi/2\,]$.

II.1.2 Utiliser successivement les identités trigonométriques suivantes, valables pour tout $(p,q)\in\mathbb{R}^2$:

$$\sin p-\sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

et
$$\cos p+\cos q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

II.3 Montrer que h se prolonge en une fonction continue sur $[\,0\,;\pi/2\,]$, puis que cette fonction est dérivable en tout point de $[\,0\,;\pi/2\,]$, la dérivée étant continue.

II.4.1 Utiliser les résultats des deux questions précédentes, en remarquant que $\sin x$ est la partie imaginaire de $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}\,x}$.

II.4.2 Utiliser les résultats des questions II.4.1 et II.1.2.

Partie III

III.1 S'inspirer de l'énoncé de la question suivante !

III.2 Appliquer le théorème de Fubini.

III.3.1 Montrer que $|\sin x| \leqslant x$ pour tout $x \in [\,0\,;u\,]$.

III.3.2 La fonction $y \mapsto \left|\dfrac{\cos u + y\sin u}{1+y^2}\right|$ est bornée sur $[\,0\,;u\,]$ indépendamment de u et de y.

III.3.3 Faire tendre u vers $+\infty$ dans l'égalité de la question III.2.

III.4.1 Utiliser le fait que la fonction $x \mapsto 1/x^2$ est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

III.4.2 Intégrer $x \mapsto \sin x/x$ par parties en utilisant le fait que $x \mapsto 1-\cos x$ est une primitive de sinus, puis faire jouer l'égalité $\cos x = 1 - 2\sin^2(x/2)$.

Les conseils du jury

Le rapport du jury donne mot pour mot les conseils généraux suivants :

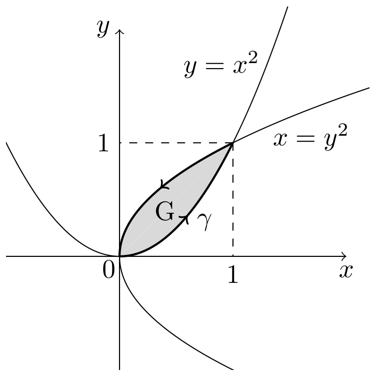
- Le cours doit être parfaitement su.
- Les techniques de base du calcul différentiel et intégral doivent être maîtrisées.
- Le bon sens et la rigueur ne doivent pas être sacrifiés à une sorte de fuite en avant pour « grapiller » des points.
- La rigueur doit sauter aux yeux à la lecture de la copie.
- La présentation, qui en général traduit la clarté de la pensée, doit être excellente.
- Les notions de géométrie élémentaire indispensables à un futur ingénieur ne doivent pas être « oubliées » !

Le rapport du jury conclut en annonçant que les prochains sujets du concours E3A seront élaborés de façon à tester les candidats sur toutes ces compétences attendues.

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .

Applications simples du cours

A.1.1 Les ensembles $x = y^2$ et $y = x^2$ sont deux paraboles, d'où le dessin suivant :



Dans le rapport du jury, celui-ci s'interroge sur « l'impossibilité pour de nombreux candidats de représenter correctement le domaine G de la première question. » Ce tracé ne présente pas de difficulté, et bâcler cette question ne met pas le correcteur en confiance !

A.1.2 Avant de commencer, donnons une description précise du domaine G et de l'arc γ. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\begin{aligned} x^2 \leqslant y \quad \text{et} \quad y^2 \leqslant x \quad &\Longrightarrow \quad x^2 \leqslant y, \quad y^2 \leqslant x, \quad x^4 \leqslant x \quad \text{et} \quad y^4 \leqslant y \\ &\Longrightarrow \quad x^2 \leqslant y, \quad y^2 \leqslant x \quad \text{et} \quad (x, y) \in [\,0\,;1\,]^2 \\ x^2 \leqslant y \quad \text{et} \quad y^2 \leqslant x \quad &\Longrightarrow \quad y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y} \quad \text{et} \quad y \in [\,0\,;1\,] \end{aligned}$$

Toutes ces implications sont des équivalences, on peut donc conclure que

$$\mathrm{G} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y^2 \leqslant x \leqslant \sqrt{y}\}$$

De plus, il est immédiat que le support de γ est donné par la frontière de G :

$$\mathrm{Fr}(\mathrm{G}) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant y \leqslant 1, y^2 = x \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{y}\}$$

Utilisons le paramétrage suivant :

$$p\colon \begin{cases} [\,-1\,;1\,] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \quad t \quad \longmapsto \begin{cases} (t^2, -t) & \text{si } t \in [\,-1\,;0\,] \\ (t, t^2) & \text{si } t \in \,]\,0\,;1\,] \end{cases} \end{cases}$$

Définissons p_1 et p_2 comme les fonctions qui associent à $t \in [\,-1\,;1\,]$ la première et la deuxième composante de p. La fonction $p = (p_1, p_2)$ ainsi considérée est continue sur chacun des intervalles $[\,-1\,;0\,]$ et $]\,0\,;1\,]$. En outre, $p(t)$ admet la limite $(0, 0) = p(0)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures, elle est donc continue sur $[\,-1\,;1\,]$. Enfin, la fonction p est également de classe $\mathscr{C}^1$ sur chacun des intervalles $]\,-1\,;0\,[$ et $]\,0\,;1\,[$, et forme bien un paramétrage de l'arc γ orienté dans le sens trigonométrique.

D'après la définition, la circulation d'un champ de vecteurs $\mathrm{P}(x, y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}(x, y)\,\mathrm{d}y$ le long d'un arc α paramétré par $q = (q_1, q_2)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I s'écrit

$$\int_\alpha \Big(\mathrm{P}(x, y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{Q}(x, y)\,\mathrm{d}y\Big) = \int_\mathrm{I} \Big(\mathrm{P}(q_1(t), q_2(t))q_1'(t) + \mathrm{Q}(q_1(t), q_2(t))q_2'(t)\Big)\,\mathrm{d}t$$

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr .