Centrale Maths 2 PSI 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Grandpierre (ENS Cachan) ; il a été relu par Julien Reygner (École Polytechnique) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet d'algèbre bilinéaire introduit la notion de valeur singulière d'une matrice, puis des applications à la géométrie et à la résolution approchée d'un système linéaire. Il fait appel à la réduction de matrices symétriques à l'aide d'une matrice de passage orthogonale.

- La première partie est consacrée à la comparaison des valeurs propres de AB et de BA, où A et B sont deux matrices carrées à coefficients réels. Après une approche initiale reposant sur la manipulation directe des vecteurs propres, on utilise finalement les polynômes caractéristiques.
- Dans la deuxième partie, cœur du sujet, on étudie les matrices ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ et $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$ afin d'introduire la notion de valeur singulière d'une matrice A. Pour cela, on réduit d'abord ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$ à l'aide d'une matrice de passage orthogonale, puis on démontre la positivité de ses valeurs propres. Les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$. Cette partie s'achève sur un critère indiquant si deux matrices possèdent les mêmes valeurs singulières.
- La partie III est consacrée à l'étude d'un cas particulier, dans lequel A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 2 donnée. Dans un premier temps, on détermine explicitement les valeurs singulières et les matrices orthogonales utilisées en suivant le même cheminement que dans la partie II. Dans un second temps, on étudie l'image de la sphère unité par A en déterminant une équation de cet ensemble.
- Dans la partie IV, l'étude de l'image de la sphère unité est reprise, dans le cas où A est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de rang 1 ou 3.
- Enfin, dans la partie V, on fait usage des valeurs singulières d'une matrice pour définir une matrice notée A^+ et dite pseudo-inverse de la matrice A. Concrètement, le produit de A avec sa pseudo-inverse est un projecteur dont le rang est égal à celui de A. Une application remarquable est l'utilisation de ces matrices pour obtenir une solution approchée d'un système linéaire. En effet, à défaut de résoudre exactement un système $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n$, on peut chercher les vecteurs $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ minimisant la norme de $\mathrm{Y} - \mathrm{AX}$. Poser $\mathrm{X} = \mathrm{A}^+\mathrm{Y}$ convient.

Ce problème d'algèbre bilinéaire, certes assez long, constitue une excellente mise en œuvre de la réduction des endomorphismes symétriques. La variété des applications, essentiellement géométriques, est appréciable.

Indications

I. Valeurs propres de AB et BA

I.B.1 Utiliser la définition d'un vecteur propre pour le premier vecteur, puis raisonner par l'absurde pour le second.

I.B.3 Procéder par inclusion, puis échanger les rôles de A et B dans les questions précédentes.

I.C.2 Comparer les polynômes caractéristiques de ces deux matrices. Faire le lien entre les racines (et leur multiplicité) du polynôme caractéristique d'une matrice et ses valeurs propres.

II. Valeurs singulières d'une matrice

II.A.1.c Utiliser les deux questions précédentes et penser au théorème du rang.

II.A.3 Utiliser la question précédente ainsi que le théorème de diagonalisation des matrices symétriques pour ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$, puis pour $\mathrm{A}\,{}^t\mathrm{A}$. En utilisant la partie I, comparer les valeurs propres de ces deux matrices (il peut s'avérer judicieux de ranger les valeurs propres dans l'ordre croissant). Conclure.

II.A.4 Faire le lien entre le nombre de termes diagonaux non nuls de D et son rang.

II.A.5.b Expliciter les termes diagonaux de D à partir de l'expression obtenue à la question précédente.

II.A.7 Diagonaliser A à l'aide d'une matrice orthogonale puis calculer ${}^t\mathrm{A}\,\mathrm{A}$.

II.B.1 Reformuler la réponse à la question II.A.3 et faire le lien entre $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, g$.

II.B.4 Calculer les vecteurs colonnes AX_i, et utiliser les questions II.B.2 et II.B.3.

II.C.1 Récapituler la démarche suivie dans la partie II.B.

II.C.2 Utiliser la question II.A.6.

III. Étude géométrique d'un exemple

III.A.4 On peut s'inspirer largement de la question II.B.4.

III.B.1 Expliciter les coordonnées de $\mathrm{Y} \in \mathcal{S}$ en fonction de celles de X, sans tenir compte de la condition $\|\mathrm{X}\| = 1$.

III.B.2 Procéder par double inclusion en utilisant l'écriture de la question III.A.5.

III.B.3 Obtenir une relation entre l'écriture de y dans une base $\mathscr{B}'$ et l'écriture de y sous la forme QDX' avec $\|\mathrm{X}'\| = 1$. Calculer la matrice QD et construire $\mathscr{B}'$ à l'aide de vecteurs colinéaires aux vecteurs colonnes de QD.

IV. Image de la sphère unité

IV.A.2 Procéder comme à la question III.B.3.

IV.B.2 Procéder également comme à la question III.B.3.

V. Pseudo-inverse d'une matrice

V.B Obtenir AA^+ sous forme d'un produit de trois matrices : une matrice orthogonale, une diagonale avec des 0 et des 1 sur la diagonale et la transposée de la première matrice.

V.C Utiliser la caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints.

V.E Reformuler la question en terme de projecteur orthogonal et utiliser la question précédente.

Le rapport du jury note que « le sujet comporte des parties “faciles”, découlant directement des définitions ou de théorèmes classiques du cours, notamment toute la première partie et le début de la seconde. Les notes sont donc, en moyenne, relativement élevées. Les parties III, IV et V sont, en revanche, plus difficiles et permettent de bien sélectionner les bons candidats (moins d'un sur cent a pu aborder l'ensemble du sujet). » Le jury précise que ces parties étaient plus « techniques » et que « les candidats devaient montrer leurs capacités à mener un calcul maîtrisé ». Finalement, « l'écart-type est donc important, environ le tiers de la moyenne ; ce qui permet à l'épreuve d'être “discriminante”. Les très bons candidats font preuve, tout à la fois de maîtrise du cours dans son ensemble et de compréhension des enjeux. » Le jury regrette en revanche avoir vu « dans d'autres copies des fautes de raisonnement grossières et des erreurs portant sur des notions de base ; certains candidats n'hésitent pas à “inventer” des théorèmes (faux) qui donnent miraculeusement réponse à la question qu'ils ne savent résoudre. »

Attention également à la présentation de votre copie. Le jury déplore la qualité de « l'orthographe, très souvent lamentable, qui peut changer le sens d'une assertion » et se demande à juste titre ce que sera « la crédibilité, voire la compréhensibilité des rapports de ces futurs ingénieurs »... Enfin, ne compliquez pas le travail de votre correcteur : « numérote[z] les pages ou les feuilles et écri[vez] le numéro de la question traitée, par exemple II.A.3.a ; un a, tout seul, en haut d'une nouvelle feuille non numérotée, oblige le correcteur à faire une enquête minutieuse et fastidieuse ».

I. Valeurs propres de AB et BA

I.A.1 Supposons que 0 est valeur propre de AB. En d'autres termes, il existe $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{X} \neq 0$, tel que $\mathrm{AB\,X} = 0$. Notons g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice AB et $x \in \mathbb{R}^n$ l'élément canoniquement associé à X. Ce qui précède implique que $g(x) = 0$ avec $x \neq 0$, en particulier g n'est pas injectif, donc pas bijectif. Matriciellement, cela signifie que AB n'est pas inversible et finalement $\det(\mathrm{AB}) = 0$.

Inversement, supposons que $\det(\mathrm{AB}) = 0$, alors AB n'est pas inversible. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à la matrice AB. $\mathbb{R}^n$ étant de dimension finie et g étant un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, g non inversible équivaut à g non injectif. Ainsi, il existe $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, tel que $g(x) = 0$. Matriciellement, cela signifie qu'il existe $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\mathrm{AB\,X} = 0$ et, par définition, cela veut dire que 0 est valeur propre de AB. Finalement, on a montré l'équivalence :

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de AB si et seulement si } \det(\mathrm{AB}) = 0.}$$

« 0 est valeur propre d'un endomorphisme g » signifie que $\operatorname{Ker} g \neq \{0\}$. Notons également qu'en dimension finie, l'inversibilité, l'injectivité et la surjectivité d'un endomorphisme sont équivalentes.

Le rapport du jury rappelle que « sur le corps des réels, les polynômes ne sont pas tous scindés ; par conséquent le déterminant n'est pas le produit des valeurs propres. »

I.A.2 D'après la question précédente, 0 est valeur propre de AB si et seulement si $\det(\mathrm{AB}) = 0$. En échangeant les rôles de A et B, on déduit que 0 est valeur propre de BA si et seulement si $\det(\mathrm{BA}) = 0$. Or,

$$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B}) = \det(\mathrm{B})\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{BA})$$

si bien que $\det(\mathrm{AB}) = 0$ si et seulement si $\det(\mathrm{BA}) = 0$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{0 est valeur propre de AB si et seulement si 0 est valeur propre de BA.}}$$

> Rappel du cours : le déterminant est multiplicatif. Pour toutes matrices $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{A})\det(\mathrm{B})$.
> Le rapport du jury note que « l'affirmation "$\det(\mathrm{AB}) = \det(\mathrm{BA})$ par propriété du déterminant" dans de nombreuses copies est un peu succinte et que le correcteur aimerait que le candidat précise de quelle propriété il s'agit. »

I.B.1 Par hypothèse, $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ est vecteur propre de AB associé à la valeur propre réelle non nulle λ. En particulier, $\mathrm{X} \neq 0$ et

$$\mathrm{AB\,X} = (\mathrm{AB})\mathrm{X} = \underbrace{\lambda}_{\neq 0}\underbrace{\mathrm{X}}_{\neq 0} \neq 0$$

$$\boxed{\text{Le vecteur AB X est non nul.}}$$

Supposons ensuite par l'absurde que $\mathrm{BX} = 0$. Alors, nécessairement,

$$\mathrm{AB\,X} = \mathrm{A}(\mathrm{BX}) = \mathrm{A}0 = 0$$

ce qui contredit la conclusion précédente.

$$\boxed{\text{Le vecteur BX est lui aussi non nul.}}$$

> Dans la définition d'un vecteur propre, ne pas oublier que le vecteur doit être non nul ; c'est primordial.

I.B.2 On vient de montrer que le vecteur BX est non nul. Il suffit maintenant de calculer

$$(\mathrm{BA})(\mathrm{BX}) = \mathrm{B}\big((\mathrm{AB})\mathrm{X}\big) = \mathrm{B}(\lambda\mathrm{X}) = \lambda\,\mathrm{BX}$$

$$\boxed{\text{BX est vecteur propre de BA associé à la valeur propre } \lambda.}$$

I.B.3 Procédons par double inclusion. Soit λ une valeur propre réelle de AB, et $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé. D'après la question I.A.2, si $\lambda = 0$, λ est aussi valeur propre de BA. Sinon, on a montré dans la réponse à la question I.B.2 que λ est valeur propre réelle non nulle de BA (associée au vecteur non nul BX). Par conséquent, le spectre réel de AB est inclus dans le spectre réel de BA.

En échangeant maintenant les rôles de A et de B, on montre que le spectre réel de BA est inclus dans le spectre réel de AB.

$$\boxed{\text{Ainsi, AB et BA ont les mêmes valeurs propres réelles.}}$$