X Physique 1 PC 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Mullaert (École Polytechnique) ; il a été relu par Vincent Freulon (ENS Ulm) et Emmanuel Loyer (Professeur en CPGE).

Les structures stellaires que l'on trouve dans l'univers ont une masse importante et peuvent par conséquent s'effondrer sous l'effet de la gravitation. Cet effondrement est compensé par d'autres forces répulsives qui permettent la stabilité de l'ensemble. Ce sujet vise à comprendre pourquoi les étoiles comme l'univers tout entier sont stables, et comment ils réagissent à de faibles perturbations, grâce à une linéarisation des équations qui régissent leur dynamique.

- La première partie développe une analogie entre les interactions gravitationnelle et électrostatique. On établit une estimation de la durée de l'effondrement, ainsi qu'une taille limite au-delà de laquelle l'effondrement se produit, à partir d'un argument énergétique.
- Dans la deuxième, on établit une relation entre l'énergie potentielle de gravitation d'une étoile et son énergie interne. L'étoile est assimilée à un gaz parfait. Une condition de stabilité sur le coefficient de Laplace fournit une explication à la stabilité du Soleil.
- La troisième est consacrée à l'étude de la stabilité de l'univers vis-à-vis de petites perturbations de densité. Dans un premier temps, on néglige la pression, ce qui conduit à une instabilité. Par la suite, la prise en compte du gradient de pression dans l'équation d'Euler donne une équation des ondes modifiée avec un terme d'ordre 0 (équation de Klein Gordon). La relation de dispersion fait apparaître l'instabilité de Jeans vis-à-vis des grandes longueurs d'onde.
- Dans la dernière partie, on démontre l'instabilité d'un modèle d'univers en expansion en suivant le même cheminement que dans la partie précédente.

En résumé, le sujet couvre une grande partie du programme de physique, de la thermodynamique à la mécanique des fluides en passant par les phénomènes de propagation et de dispersion. Il comporte quelques questions de cours, mais aussi de difficiles questions d'interprétation qui testent efficacement le sens physique des candidats.

Indications

Partie I

I.1 Utiliser l'équation locale fournie par l'énoncé.

I.2.1 Analyser les invariances et symétries du problème puis utiliser le théorème de Gauss.

I.3.1 Montrer tout d'abord que la masse de gaz située à une distance inférieure à celle de la masse μ est constante lors de la chute. Enfin, la chute libre peut être assimilée à une demi-ellipse très aplatie.

Partie II

II.1.2 Le champ de force volumique qui résulte d'une pression non homogène est $\overrightarrow{f}_{\mathrm{v}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}$. Ici, le gradient est radial en raison de la symétrie sphérique.

II.2.3 Écrire l'énergie potentielle comme une intégrale des énergies élémentaires calculées ci-dessus. Réaliser une intégration par parties.

II.3 Exprimer la capacité thermique molaire $\mathrm{C_V}$ à l'aide de γ en utilisant la relation de Mayer $\mathrm{C_P} - \mathrm{C_V} = \mathrm{R_{GP}}$.

II.4 Écrire l'énergie contenue dans la couronne comprise entre les rayons r et $r+\mathrm{d}r$ en fonction de $\mathrm{d}r$ puis en fonction de dV. Intégrer entre $r = 0$ et $r = \mathrm{R}$ pour obtenir E. Reconnaître l'intégrale qui apparaît dans l'expression de $\mathrm{E_g}$.

Partie III

III.2 Ne pas oublier le gradient de pression.

III.3 La formule est donnée au début de l'énoncé.

III.4.2 Il faut négliger les termes d'ordre 2 pour que l'équation obtenue soit linéaire. Utiliser également la question précédente pour simplifier l'expression. Afin d'obtenir l'équation vérifiée par ρ_1, il faut dériver l'équation de conservation de la masse et éliminer $\overrightarrow{g_1}$ et $\overrightarrow{v_1}$ grâce aux deux autres relations.

III.5.2 Linéariser la loi de comportement au voisinage de ρ_0.

III.5.3 C'est ρ_1 qui est une onde plane. Utiliser l'équation de propagation pour en déduire une condition sur ω et k.

III.5.4 Si ω est complexe, l'amplitude de l'onde plane augmente exponentiellement au cours du temps.

Partie IV

IV.2.2 Exprimer $\overrightarrow{r}$ et $\overrightarrow{v}$ en fonction de a.

IV.2.3 Injecter $a(t) = \mathrm{A}\,t^{\alpha}$ dans l'équation précédente. Pour qu'un tel monôme en t soit constant, il faut que la puissance de t soit nulle.

IV.3.1 Il faut éliminer les termes d'ordre 2 et utiliser l'équation de conservation de la masse qui fait apparaître la dérivée particulaire.

IV.3.2 Utiliser l'équation d'Euler satisfaite par la vitesse $\overrightarrow{v_0}$. Attention à l'opérateur de dérivation d'ordre 0. La convection se fait ici à la vitesse $\overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_1}$.

IV.3.3 Procéder de même qu'à la question III.4.

Stabilité de la matière, stellaire et interstellaire

I. Première Approche

I.1 Si on compare l'équation locale fournie par l'énoncé

$$\operatorname{div} \overrightarrow{g} = -4\pi\,\mathrm{G}\,\rho$$

avec l'équation de Maxwell-Gauss,

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

on peut faire une analogie en identifiant charge volumique et masse volumique ρ. De même, on identifie les champs électrostatique et gravitationnel, ainsi que la constante G et $-1/4\pi\varepsilon_0$.

> Il est bon de connaître les limites de cette analogie : la force électrostatique peut être répulsive alors que la force gravitationnelle est toujours attractive.

I.2.1 Considérons un point M quelconque, différent de l'origine. Tout plan contenant la droite (OM) est un plan de symétrie pour la densité ρ. Comme $\overrightarrow{g}$ est un vecteur polaire, il appartient à l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire

$$\overrightarrow{g} = g\,\overrightarrow{e_r}$$

En raison des invariances du problème par rotation autour de n'importe quel axe passant par l'origine, la norme de $\overrightarrow{g}$ ne dépend que de la distance r à l'origine. Finalement,

$$\overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{r}\,) = g(r)\,\overrightarrow{e_r}$$

Considérons la boule B de centre l'origine et de rayon $r > \mathrm{R}$. D'après la forme gravitationnelle de l'équation de Gauss, on a

$$\iiint_{\mathrm{B}} \operatorname{div} \overrightarrow{g}\,\mathrm{dV} = \iiint_{\mathrm{B}} -4\pi\,\mathrm{G}\rho(r)\,\mathrm{dV} = -4\pi\,\mathrm{G}\,\mathrm{M}$$

Or, si l'on note S la surface de la sphère entourant B, avec sa normale orientée vers l'extérieur, le théorème d'Ostrogradski permet d'écrire

$$\iiint_{\mathrm{B}} \operatorname{div} \overrightarrow{g}\,\mathrm{dV} = \oiint_{\mathrm{S}} \overrightarrow{g} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\Sigma} = 4\pi\,r^2\,g(r)$$

On en déduit

$$\boxed{\overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{r}\,) = -\frac{\mathrm{GM}}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

> On voit que dans le cas $r > \mathrm{R}$, le champ obtenu est le même que celui créé par une masse ponctuelle M placée à l'origine.

I.2.2 Le raisonnement précédent reste valable à condition d'adapter la masse contenue dans la sphère fictive qui ne vaut plus M, mais $m(r)$.

$$\boxed{\overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{r}\,) = -\frac{\mathrm{G}\,m(r)}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

I.3.1 On remarque tout d'abord que la masse située à une distance à l'origine inférieure à celle de la masse μ ne varie pas pendant la chute car l'étoile s'effondre en gardant sa symétrie sphérique. On peut donc considérer que la masse μ est en chute libre dans le champ de pesanteur d'une masse ponctuelle $\mathrm{M_0}$. La trajectoire est par conséquent une conique dont le centre de l'astre de masse $\mathrm{M_0}$ est l'un des foyers. Comme la vitesse initiale est nulle, l'énergie de la particule est strictement négative et la trajectoire est une ellipse. De plus, la vitesse orthoradiale initiale est nulle, si bien que l'ellipse se réduit à un segment et les foyers en sont les extrémités.

> Si on note a le demi grand axe et b le demi petit axe de l'ellipse, la demi-distance c entre les foyers est reliée à l'excentricité e par
> $$c = e\,a \qquad \text{et} \qquad a^2 = b^2 + c^2$$
> Ainsi, si l'excentricité tend vers 1 et a reste fixé, alors c tend vers a et b tend vers 0. On a bien une ellipse aplatie avec les foyers situés aux extrémités. Attention, dire que l'on fait tendre l'excentricité vers 1 ne suffit pas : si on laisse le paramètre de l'ellipse $p = b^2/a$ constant et que l'on fait tendre l'excentricité vers 1, on obtient une parabole.
>
> Géométriquement, si on se donne deux points F et F′, l'ellipse de foyer F et F′ est le lieu des points M pour lesquels
> $$\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = \mathrm{C^{te}}$$
> Si on prend la constante égale à FF′, on obtient le segment [FF′] et les foyers de cette ellipse plate sont bien ses extrémités.

La particule est initialement à l'apogée de sa trajectoire. La hauteur de chute r_0 est par conséquent égale au grand axe de l'ellipse. Dans ces conditions, la durée de la chute est la moitié de la période de révolution donnée par la loi de Kepler. On obtient

$$\tau_{\mathrm{g}} = \pi\sqrt{\frac{{\mathrm{R_0}}^3}{8\,\mathrm{G}\,\mathrm{M_0}}}$$

Finalement, en remarquant que $\mathrm{M_0} = \dfrac{4}{3}\pi\,{\mathrm{R_0}}^3\,\rho$, on obtient

$$\boxed{\tau_{\mathrm{g}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32\,\rho\,\mathrm{G}}}}$$

Cette grandeur ne dépend plus de la hauteur initiale r_0, ce qui signifie que deux masses identiques placées à des distances différentes de l'origine mettent le même temps à rejoindre l'origine lors de l'effondrement.

> On peut retrouver la formule donnant le temps de chute. Écrivons l'égalité des énergies massiques entre les positions r et r_0 :
> $$\frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\mathrm{G}\,\mathrm{M_0}}{r} = -\frac{\mathrm{G}\,\mathrm{M_0}}{r_0}$$
> c'est-à-dire
> $$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\frac{2\,\mathrm{G}\,\mathrm{M_0}}{r_0}\left(\frac{r_0}{r} - 1\right)}$$
> Séparons les variables et intégrons entre $r = r_0$ et $r = 0$:
> $$\tau_{\mathrm{g}} = \int_0^{\tau_{\mathrm{g}}} \mathrm{d}t = -\int_{r_0}^{0} \frac{\mathrm{d}r}{\sqrt{\dfrac{2\,\mathrm{G}\,\mathrm{M_0}}{r_0}\left(\dfrac{r_0}{r} - 1\right)}}$$