Mines Maths 2 PC 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Guillaume Batog (ENS Cachan) ; il a été relu par Julien Lévy (Professeur en CPGE) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Le problème se propose de calculer l'intégrale :

$$\mathrm{I}(x) = \int_0^1 \frac{u^{x-1} + u^{-x}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$

en faisant apparaître un noyau de Poisson dont on étudie quelques propriétés. Il comporte quatre parties, dont les trois premières sont indépendantes.

- La première partie ne comporte qu'une seule question, préliminaire au problème. Il s'agit de déterminer le domaine de définition de $\mathrm{I}(x)$.
- La deuxième partie considère des intégrales généralisant $\mathrm{I}(x)$ en y introduisant un paramètre et une fonction développable en série entière. Très peu de propriétés sont utilisées concernant les séries entières. En revanche, les gros théorèmes d'analyse portant sur les intégrales sont appliqués à de nombreuses reprises. Un petit calcul dans le corps des complexes fournit une expression intégrale qui sera utile dans la dernière partie.
- La troisième partie est consacrée à l'étude du noyau de Poisson. On y utilise les mêmes techniques qu'à la partie précédente, parfois même plus facilement. En revanche, les deux dernières questions sont les plus difficiles du problème. On y prouve un comportement limite, spécifique aux « bons » noyaux, à l'aide de raisonnements classiques d'analyse.
- La quatrième partie ne présente pas de difficulté particulière ; il s'agit essentiellement d'appliquer les principaux résultats des parties précédentes. On y détermine la valeur de $\mathrm{I}(x)$.

Le niveau de ce sujet se situe dans la moyenne de ceux proposés au concours des Mines : les techniques sont très classiques en analyse mais nécessitent de l'expérience dans leur utilisation. Bien que le thème du problème soit le calcul d'une intégrale, très peu de calculs sont nécessaires pour répondre aux questions.

Indications

1 Calculer un équivalent de l'intégrande au voisinage de 0.

2 Même indication qu'à la question 1. Conclure alors à l'intégrabilité de la fonction sous l'intégrale.

3 Prouver la continuité en y sur $[\,0\,;1\,[$ de l'intégrale définie à la question 2 à l'aide du théorème de continuité sous le signe intégrale.

4 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions avec le développement en série entière de f.

5 Calculer directement l'intégrale.

6 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions avec le développement en série entière de $\widetilde{f}$ donné dans l'énoncé puis calculer la partie réelle du résultat obtenu.

7 Utiliser l'égalité $\mathrm{S}[f](x,y) = \mathrm{J}[f](x,y)$ obtenue à la question 6.

8 Calculer directement la partie réelle du membre de droite pour obtenir $\mathrm{P}(t,y)$.

9 Développer en série entière l'application

$$y \longmapsto \frac{1 + y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi t}}{1 - y\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\pi t}}$$

10 Appliquer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions en utilisant la série obtenue à la question 9.

11 Appliquer le théorème de convergence dominée pour établir la limite. On considérera un intervalle de la forme $[\,\beta\,;1\,[$ pour y, avec β convenablement choisi. Pour la majoration, faire apparaître l'intégrale de la question 10.

12 Pour le cas $\varphi(0) = 0$, établir la limite en raisonnant avec des ε : majorer l'intégrale sur les intervalles respectifs $[\,0\,;\alpha\,]$ et $[\,\alpha\,;1\,]$ avec α bien choisi, à l'aide des résultats de la question 11. Montrer en particulier que $\underset{[\,0\,;\alpha\,]}{\mathrm{Sup}}\,|\varphi| \xrightarrow[\alpha\to 0]{} 0$.

Pour le cas général, considérer l'application $t \longmapsto \varphi(t) - \varphi(0)$ et utiliser l'égalité de la question 10.

13 Faire apparaître $\mathrm{A}(x,y)$ et $\mathrm{A}(1-x,y)$ dans l'expression de $\mathrm{C}[g](x,y)$ obtenue à la question 7.

14 Utiliser les résultats des questions 12 et 13.

15 Montrer que $\lim\limits_{y\to 1} \mathrm{C}[g](x,y) = \mathrm{I}(x)$ en écrivant la définition

$$\mathrm{C}[g](x,y) = \mathrm{S}[f](x,y) + \mathrm{S}[f](1-x,y)$$

Utiliser le résultat de la question 14 pour conclure.

Les conseils du jury

Le rapport du jury donne de nombreux conseils sur la manière de *bien* rédiger afin « d'être récompensé par le barème ». Les candidats se contentant de citer ou d'énoncer un théorème du cours « sont toujours très pénalisés et souvent éliminés ». Il faut absolument « vérifier ses hypothèses dans le cadre du sujet » « avec justification précise de toutes les étapes », ce qui ne signifie pas d'en écrire des pages : « Le correcteur cherche des arguments clés, formulés de manière précise et concise. Pour cela, souvent quelques lignes suffisent. Les meilleures copies sont brèves. »

I. Question préliminaire

1 La fonction $h_x : u \longmapsto (u^{x-1} + u^{-x})\, g(u)$ est continue sur $]\,0\,;1\,]$ comme produit de fonctions continues sur $]\,0\,;1\,]$. Elle y est de plus positive.

Calculons un équivalent de h_x en 0 pour décider son intégrabilité sur $]\,0\,;1\,]$. Celui-ci dépend de l'ordre des puissances $x-1$ et $-x$ intervenant dans l'expression de h_x. En effet pour deux réels $\alpha < \beta$, $u^\beta = \mathrm{o}(u^\alpha)$ au voisinage de 0 donc $u^\alpha + u^\beta \sim u^\alpha$ au voisinage de 0. Puisque g est continue en 0 et $g(0) = 1$, on obtient les équivalents suivants :

$$h_x(u) \underset{u\to 0}{\sim} \begin{cases} u^{-x} & \text{si } x > 1/2 \\ 2/\sqrt{u} & \text{si } x = 1/2 \\ u^{x-1} & \text{si } x < 1/2 \end{cases}$$

Or la fonction puissance $u \longmapsto u^\alpha$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $\alpha > -1$. D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives,

- pour $x > 1/2$, h_x est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $x < 1$;
- $h_{1/2}$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$;
- pour $x < 1/2$, h_x est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $x > 0$.

Finalement, h_x est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $x \in \,]\,0\,;1\,[$.

> Comme h_x possède une symétrie en 1/2 pour x ($h_{1-x} = h_x$), on peut restreindre l'étude de l'intégrabilité de h_x pour $x \geqslant 1/2$.

Puisque h_x est positive, son intégrale (impropre) sur $]\,0\,;1\,]$ converge si et seulement si h_x est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$, d'où

$$\boxed{\mathrm{I}(x) \text{ existe si et seulement si } x \in \,]\,0\,;1\,[.}$$

> Une autre méthode pour prouver l'existence de $\mathrm{I}(x)$ consiste à décomposer la fonction positive h_x comme la somme des deux fonctions positives $u \longmapsto u^{x-1}g(u)$ et $u \longmapsto u^{-x}g(u)$. La première est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $x > 0$ et la seconde l'est si et seulement si $x < 1$. Ainsi h_x est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ si et seulement si $x \in \,]\,0\,;1\,[$ grâce à la propriété suivante : deux fonctions positives f_1 et f_2 continues définies sur un intervalle A sont intégrables sur A si et seulement si leur somme $f = f_1 + f_2$ est intégrable sur A. En effet,
>
> - si f_1 et f_2 sont intégrables, on conclut à l'intégrabilité de f grâce à l'inégalité triangulaire $|f| \leqslant |f_1| + |f_2|$ (qui est vérifiée pour toutes les fonctions, qu'elles soient positives ou non) ;
> - si f est intégrable, on conclut à l'intégrabilité de f_i puisque $0 \leqslant f_i \leqslant f$ (la positivité des fonctions est primordiale ici).
>
> En revanche, cette équivalence est fausse si on ne suppose pas que les deux fonctions sont positives. Par exemple, $u \longmapsto u^{-2} - u^{-1}$ et $u \longmapsto u^{-1}$ sont non intégrables sur $[\,1\,;+\infty\,[$ mais leur somme $u \longmapsto u^{-2}$ est intégrable sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

II. Une identité intégrale

2 Soient $x > 0$ et $y \in \,]\,0\,;1\,[$ fixés. La fonction $h : v \longmapsto v^{x-1} f(yv)$ est continue sur $]\,0\,;1\,]$ comme produit de fonctions continues sur ce domaine. En effet, $|yv| < 1$ pour tout v dans $]\,0\,;1\,]$ et f est continue sur $[\,0\,;1\,[$ car elle y est développable en série entière, donc la composée $v \longmapsto f(yv)$ est continue sur $]\,0\,;1\,]$.

Étudions à présent le comportement de h au voisinage de 0 pour montrer que h est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$. D'abord, si f est identiquement nulle, alors h aussi et l'intégrale est nulle. Sinon, posons $p = \operatorname{Min}\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \neq 0\}$. Celui-ci existe car c'est le minimum d'un ensemble non vide d'entiers naturels (si tous les a_n sont nuls, alors f est nulle). Comme

$$f(v) = \sum_{n \geqslant p} a_n\, v^n = \Big(a_p + \sum_{n \geqslant 1} a_{n+p}\, v^n\Big)\, v^p$$

on obtient $$\frac{f(v)}{v^p} \xrightarrow[v \to 0]{} a_p$$

Ainsi $$f(yv) \underset{v \to 0}{\sim} a_p\, y^p\, v^p$$

d'où $$h(v) \underset{v \to 0}{\sim} a_p\, y^p\, v^{p+x-1}$$

et même $$|h(v)| \underset{v \to 0}{\sim} |a_p|\, y^p\, v^{p+x-1}$$

La fonction puissance obtenue est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ puisque $p+x-1 > -1$. Comme la fonction $|h|$ est continue positive sur $]\,0\,;1\,]$, $|h|$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$ d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives. Puisque la convergence absolue d'une intégrale implique sa convergence, l'intégrale de h sur $]\,0\,;1\,]$ est bien définie.

$$\boxed{\text{L'intégrale } \int_0^1 v^{x-1} f(yv)\, \mathrm{d}v \text{ est bien définie pour tout } x > 0 \text{ et tout } y \in \,]\,0\,;1\,[.}$$

Il n'est pas nécessaire de calculer précisément un équivalent pour étudier le comportement local d'une fonction : de grosses approximations suffisent parfois. Ici, comme f est continue en 0, $f = \mathrm{O}(1)$ au voisinage de 0 (c'est-à-dire qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit bornée sur le segment $[\,0\,;\varepsilon\,]$) donc $h(v) = \mathrm{O}(v^{x-1})$. L'intégrabilité de h s'en déduit comme précédemment.

Le rapport du jury signale que « beaucoup de candidats se sont mis à développer f en série entière, à permuter les signes $\int$ et $\sum$ et à aboutir à la valeur de l'intégrale en terme de a_n, en anticipant sur la question 4. Cette démarche superflue n'a été récompensée que lorsqu'elle a été faite correctement avec justification précise de toutes les étapes. »

L'intégrale est bien définie lorsque $y = 0$ puisqu'on obtient

$$\int_0^1 f(0)\, v^{x-1}\, \mathrm{d}v = \frac{f(0)}{x}$$

mais elle ne l'est pas forcément lorsque $y = 1$ car le comportement de f au voisinage de 1 n'est pas connu.