CCP Maths 2 PC 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Julien Reygner (École Polytechnique) ; il a été relu par Guillaume Dujardin (Chercheur INRIA) et Benoît Chevalier (ENS Ulm).

Ce sujet d'analyse propose une étude de quelques propriétés de la fonction

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) \end{cases}$$

- La première partie introduit la famille des polynômes d'Hermite (H_n) à partir du développement en série entière de la fonction

$$\mathrm{F}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, z) \longmapsto \exp\left(-zx - \dfrac{x^2}{2}\right) \end{cases}$$

  On montre que ces polynômes vérifient une relation de récurrence d'ordre 2, qu'ils peuvent s'exprimer en fonction des dérivées de f, qu'ils sont solutions d'une famille d'équations différentielles d'ordre 2, et enfin qu'ils sont orthogonaux pour un certain produit scalaire.
- La deuxième partie introduit la transformée de Fourier de f :

$$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-2i\pi\nu x - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x$$

  On montre qu'elle vérifie une équation différentielle d'ordre 1, ce qui permet de la déterminer explicitement.
- La troisième partie est consacrée à l'étude de la série de fonctions

$$\mathrm{U}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(x - 2n\pi)$$

  dont on commence par vérifier qu'elle converge, puis que sa somme est continue et 2π-périodique. On montre enfin que ses coefficients de Fourier s'expriment simplement en fonction de f.

Ce problème ne comporte pas de difficulté particulière. La partie I, essentiellement calculatoire, est sensiblement plus longue que les deux autres. Elle requiert un peu d'habileté dans la manipulation des dérivées. La partie II fait appel aux théorèmes du cours sur les intégrales à paramètre et demande de résoudre une équation différentielle d'ordre 1. La partie III fait appel aux théorèmes du cours sur les séries de fonctions et aborde rapidement les séries de Fourier.

Moyennant un peu d'investissement dans les calculs de la première partie, ce sujet assez accessible permet donc une bonne révision d'une grande partie du programme d'analyse.

Indications

Partie I

I.1.1 Écrire le développement en série entière de la fonction exponentielle.

I.1.2 Voir $\mathrm{F}(x,z)$ comme le produit des deux développements en série entière donnés à la question précédente.

I.1.3 Dériver terme à terme le développement en série entière de $\mathrm{F}(x,z)$ et l'identifier avec le développement en série entière de la dérivée (par rapport à x) de $\mathrm{F}(x,z)$. Effectuer les changements d'indice nécessaires pour remettre tous les x à la même puissance.

I.2.2 Utiliser la relation trouvée à la question I.2.1 puis remarquer que H_n et K_n vérifient la même relation de récurrence.

I.3.1 Travailler avec l'expression définissant K_n.

I.3.2 Dériver la relation obtenue à la question I.3.1 et utiliser la relation de récurrence sur H_n obtenue à la question I.1.3.

I.4 Calculer les dérivées première et seconde de φ_n et utiliser le résultat de la question I.3.2.

I.5.2 Travailler avec l'expression de $\mathrm{I}_{p,q}$ faisant intervenir H_p et H_q et utiliser les expressions de K_p et K_q pour l'intégration par parties.

Partie II

II.1 Majorer le module de $\mathrm{F}(t, 2i\pi\nu)$ par $f(t)$.

II.3.1 Utiliser la formule de Leibniz et le résultat de la question II.2 pour dériver « sous l'intégrale ».

II.3.2 Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $\widehat{f}$.

Partie III

III.1.1 Prendre garde au fait qu'on a choisi n de sorte que $2n\pi \geqslant \mathrm{A}$.

III.2.3 Montrer que les u_n sont paires, et qu'il en est donc de même pour les U_n.

III.3.2 Échanger somme et intégrale et utiliser la 2π-périodicité du cosinus pour effectuer un changement de variable faisant apparaître $f(x)$ dans l'intégrale.

III.3.3 Utiliser le théorème de convergence dominée. Se servir de la convergence normale de U_k sur $[-\pi;\pi]$ pour majorer $\sum\limits_{j=0}^{k} \|u_j\|_\infty$ par la somme de cette série.

III.3.4 Écrire $\cos(nx) = \dfrac{1}{2}[\exp(inx) + \exp(-inx)]$.

Le rapport du jury fait état d'un sujet « assez court et sans sérieuse difficulté », en précisant que « tous les résultats pouvant intervenir dans la suite du problème étaient donnés dans l'énoncé », et qu'il « n'était pas demandé aux candidats de faire preuve d'astuce, mais seulement de connaître les théorèmes fondamentaux du programme ».

Il signale que « la connaissance [de ceux-ci] semble en progrès », mais qu'il « n'en est pas de même concernant leur application », et que « la vérification dans des cas particuliers des conditions permettant leur utilisation est souvent traitée avec désinvolture, et parfois donne lieu à des expressions délirantes ».

Ainsi peut-on conseiller aux candidats de faire preuve de plus d'esprit critique, « le manque de fondements solides à leurs connaissances [les exposant] souvent à commettre de graves bévues ». Le rapport du jury insiste également sur la nécessité de la rigueur dans la rédaction, et rappelle en conclusion qu'il est indispensable de systématiquement démontrer tout ce que l'on affirme !

PARTIE I

I.1.1 D'après le cours, la fonction $x \mapsto \exp(x)$ est développable en série entière avec un rayon de convergence infini, et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n\,!}$$

En composant cette égalité avec les fonctions polynomiales $x \mapsto -zx$ et $x \mapsto -x^2/2$, on obtient les développements en série entière sur $\mathbb{R}$ suivants :

$$\boxed{\exp(-zx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n\,!} x^n \qquad \text{et} \qquad \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n\,!} x^{2n}}$$

Rappelons qu'une fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est dite développable en série entière avec un rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ s'il existe une suite de nombres complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout nombre complexe x de module strictement inférieur à R, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est convergente, et que sa somme vaut $f(x)$. Si la série est convergente sur tout disque de $\mathbb{C}$, alors le rayon de convergence est dit infini.

Pour normaliser le second développement en une série entière $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, définissons

$$\varepsilon(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dfrac{(-1)^k}{2^k k\,!} & \text{s'il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2k \end{cases}$$

puis écrivons
$$\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n) x^n$$

C'est cette écriture qui est adoptée dans la suite du corrigé. Il est néanmoins possible de faire les calculs en gardant une série entière en x^2, mais alors il faut être prudent dans la manipulation des indices, comme le montre la question suivante – pour laquelle le rapport de jury précise d'ailleurs que « [peu nombreux] sont ceux qui ont obtenu une expression cohérente ».

I.1.2 Le produit de deux fonctions développables en série entière, de rayons de convergence respectifs R et R′, est développable en série entière et son rayon est supérieur ou égal au minimum de R et de R′. Puisqu'elle est le produit des deux fonctions dont on a donné le développement à la question précédente, la fonction $x \mapsto \mathrm{F}(x,z)$ est donc développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et son développement est donné par le produit de Cauchy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n\,!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n) x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+q=n} \frac{(-z)^p}{p\,!}\varepsilon(q)\right) x^n$$

En posant, pour tout $n \geqslant 0$, $\qquad \mathrm{A}_n(z) = \displaystyle\sum_{p+q=n} \frac{(-z)^p}{p\,!}\varepsilon(q)$

on a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\qquad \boxed{\mathrm{F}(x,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}_n(z) x^n}$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons maintenant que $\mathrm{A}_n(z)$ est un polynôme en z, de degré n. On a l'expression

$$\mathrm{A}_n(z) = \sum_{p+q=n} \frac{(-z)^p}{p\,!}\varepsilon(q)$$

Puisque $\varepsilon(q)$ ne dépend pas de z, il est clair que $\mathrm{A}_n(z)$ est un polynôme en z de degré au plus n. De plus, pour tout $p \in [\![\, 0\,;\, n \,]\!]$, le coefficient devant z^p est $(-1)^p\varepsilon(n-p)/p\,!$. En particulier, le coefficient d'ordre n vaut $(-1)^n\varepsilon(0)/n\,!$. Puisqu'on a $\varepsilon(0) = 1$, on en conclut que

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}_n(z) \text{ est un polynôme en } z \text{ de degré } n.}$$

L'écriture $\exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon(n) x^n$ est ici pratique car elle permet d'appliquer directement la formule de Cauchy

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{p+q=n} a_p b_q\Big) x^n$$

Si l'on souhaite garder pour $f(x)$ le développement $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n\,!} x^{2n}$, il faut être très vigilant dans la manipulation des indices et prendre garde à ne sommer que sur les puissances paires de x :

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(x,z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-z)^n}{n\,!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n\,!} x^{2n}\right)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+2q=n} \frac{(-z)^p}{p\,!} x^p \frac{(-1)^q}{2^q q\,!} x^{2q}\right)\\
\mathrm{F}(x,z) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{p+2q=n} \frac{(-1)^{p+q} z^p}{2^q (p\,!)(q\,!)}\right) x^n
\end{aligned}$$