CCP Maths 1 PC 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jérôme Gärtner (ENS Cachan) ; il a été relu par Guillaume Batog (ENS Cachan) et Paul Pichaureau (Professeur en CPGE).

Ce problème traite d'algèbre matricielle, plus particulièrement des *fonctions matriciellement croissantes*. Ce sont les fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ qui, appliquées d'une certaine manière sur des matrices symétriques réelles, conservent une relation d'ordre introduite par l'énoncé.

Le sujet introduit des notions importantes en algèbre linéaire qui ont récemment disparu du programme de PC (bien que toujours au programme des autres filières), celle de matrices positives et définies positives.

- La première partie, plutôt proche du cours, concerne les matrices symétriques. On y définit et caractérise les matrices positives et définies positives en termes de valeurs propres. À la question 8, l'énoncé introduit une relation d'ordre : deux matrices symétriques réelles A et B vérifient $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$ si et seulement si $\mathrm{B} - \mathrm{A}$ est définie positive. La fin de cette partie est consacrée à l'étude de cette relation d'ordre : est-elle totale ? compatible vis-à-vis de l'addition ? du passage à l'inverse ?
- Les premières questions de la deuxième partie, elles aussi proches du cours, abordent la réduction des endomorphismes. Ensuite, l'énoncé définit la notion de *décomposition spectrale*. La fin de cette partie concerne la théorie des fonctions matriciellement croissantes à proprement parler, et l'illustre sur quelques exemples. Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite matriciellement croissante si pour toutes matrices symétriques réelles A et B vérifiant $\mathrm{A} \leqslant \mathrm{B}$ pour l'ordre décrit plus haut, $f(\mathrm{A}) \leqslant f(\mathrm{B})$, où $f(\mathrm{A})$ et $f(\mathrm{B})$ sont définies à l'aide de la décomposition spectrale. La fin de cette partie utilise les fonctions hyperboliques et un soupçon d'analyse. La dernière question est la plus difficile du problème.
- La troisième partie donne deux exemples de fonctions matriciellement croissantes. On y utilise quelques notions simples sur les intégrales généralisées ainsi qu'une méthode introduite par l'énoncé pour prouver qu'une fonction est matriciellement croissante.

En résumé, il s'agit d'un problème de difficulté moyenne mais plutôt long. On y trouve beaucoup de questions proches du cours, qu'il ne faut surtout pas bâcler. La difficulté est croissante au sein des parties.

Ce sujet est bien adapté pour s'entraîner sur l'algèbre bilinéaire, la réduction d'endomorphismes (en particulier la notion de valeur propre), le calcul d'équivalents et de développements limités simples, avec un zeste d'intégrales généralisées.

Indications

Partie I

I.2 Utiliser la diagonalisation d'une matrice symétrique en base orthonormée.

I.5 Appliquer le résultat obtenu à la question I.2.

I.7 Pour montrer que $S = 0$, suivre l'indication de la question I.2.

I.8.b Chercher un contre-exemple à l'aide de matrices diagonales de taille 2.

I.9 Utiliser la question I.1.

I.11.a Matriciellement, $\|X\|^2 = {}^t X\, X$.

I.11.b Écrire S sous la forme $PD\,{}^tP$ et définir une « racine carrée » de D.

I.11.c Une fois de plus, S est diagonalisable en base orthonormée.

I.12 Utiliser les questions I.9 et I.10.b.

Partie II

II.1.a Procéder par analyse et synthèse.

II.1.c Utiliser la formule du binôme de Newton.

II.1.d Diagonaliser S_0 à l'aide d'un polynôme annulateur de la matrice $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ne contenant que des « 1 ».

II.2.c Utiliser la question II.2.b et la définition d'un projecteur orthogonal.

II.3.b Utiliser la décomposition spectrale de S.

II.4.b Les propriétés montrées à la question I.8 peuvent s'appliquer ici.

II.5.a Revenir à la définition de matrice positive.

II.5.b Diagonaliser $A(x)$.

II.5.e Après avoir calculé l'équivalent demandé, montrer que les deux valeurs propres de $p_\alpha(A(x)) - p_\alpha(B(x))$ ne sont pas de même signe. Conclure à l'aide de la question I.2.

Partie III

III.2.b Attention au théorème de changement de variables sur les intégrales généralisées.

III.2.c Les λ_i sont les valeurs propres de S, et les P_i les projections de la décomposition spectrale associée.

III.2.e Utiliser les questions III.1.a, III.2.b et I.8.d.

III.3.a Il est préférable de calculer avec des bornes finies, puis de passer à la limite.

III.3.b Cette question est analogue à la question III.2.c.

III.3.c Reprendre la question III.2.e.

Le rapport du jury signale deux problèmes présents dans trop de copies :

- « Des difficultés de compréhension des notions introduites dans le problème, mais aussi des notions de base du programme : la relation d'ordre sur les matrices, [...] la définition de fonction matricielle. Un grand nombre de candidat ne sait toujours pas manipuler le symbole Σ.

  Lorsque le résultat n'est pas donné dans l'énoncé, on obtient trop fréquemment des réponses dénuées de bon sens.[...] De telles erreurs [...] montrent le degré d'incompréhension et l'absence totale de sens critique de leurs auteurs. » Relisez-vous !
- « Un manque de rigueur et de logique trop fréquent : dès la toute première question du problème une grande majorité de candidats oublie de montrer que ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M}$ est symétrique. [...] Il est trop fréquent de voir affirmer qu'un vecteur est un vecteur propre sans s'assurer qu'il est non nul ou bien de voir transformer une intégrale convergente en différence de deux intégrales divergentes. »

PARTIE I

I.1 Soient $\mathrm{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Alors d'une part, ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M}$ est symétrique

$$ {}^t\left({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M}\right) = {}^t\mathrm{M}\;{}^t\mathrm{S}\;{}^t\!\left({}^t\mathrm{M}\right) = {}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M} $$

D'autre part, ${}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M}$ est positive. En effet, en posant $\mathrm{Y} = \mathrm{M}\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a les égalités suivantes

$$ {}^t\mathrm{X}({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M})\mathrm{X} = {}^t(\mathrm{M}\mathrm{X})\mathrm{S}(\mathrm{M}\mathrm{X}) = {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{S}\mathrm{Y} $$

c'est-à-dire $$ {}^t\mathrm{X}({}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M})\mathrm{X} \geqslant 0 $$ par positivité de S

Finalement, $$ \boxed{{}^t\mathrm{M}\,\mathrm{S}\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n^+} $$

Le jury regrette que les candidats ne donnent qu'une demi-réponse : « la preuve de la symétrie est trop souvent oubliée ».

I.2 Puisque S est une matrice symétrique, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $\mathrm{S} = \mathrm{P}\mathrm{D}\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P}\mathrm{D}\,{}^t\mathrm{P}$. Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de S, notées ici $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On a

$$ \begin{aligned} {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{S}\mathrm{X} &= {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{P}\mathrm{D}\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{X} \\ &= {}^t({}^t\mathrm{P}\,\mathrm{X})\mathrm{D}\,{}^t\mathrm{P}\,\mathrm{X} \\ {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{S}\mathrm{X} &= {}^t\mathrm{Y}\,\mathrm{D}\mathrm{Y} \end{aligned} $$

on a posé $\mathrm{Y} = {}^t\mathrm{P}\,\mathrm{X}$. Si Y s'écrit $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors :

$$ {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{S}\mathrm{X} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2 $$

Si toutes les valeurs propres de A sont positives, alors on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i {y_i}^2 = {}^t\text{X}\,\text{SX} \geqslant 0$ donc $\text{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Si toutes les valeurs propres de A sont strictement positives et si $\text{X} \neq 0$, alors $\text{Y} = {}^t\text{P}\,\text{X} \neq 0$ (car ${}^t\text{P}$ est inversible) et donc ${}^t\text{X}\,\text{SX} > 0$. Ainsi $\text{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Réciproquement, si $\text{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Pour $i \in [\![\, 1\,;\, n\,]\!]$, en posant $\text{X} = \text{P}e_i$, on a $\text{Y} = e_i$ et ${}^t\text{X}\,\text{SX} = \lambda_i \geqslant 0$. Donc toutes les valeurs propres de S sont positives. De plus, si $\text{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, par le même calcul, ${}^t\text{X}\,\text{SX} = \lambda_i > 0$ et les valeurs propres de S sont strictement positives.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{S} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \text{ (respectivement } \text{S} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})\text{) si et seulement si toutes ses} \\ \text{valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).}\end{array}}$$

I.3 La matrice A est clairement symétrique. Son polynôme caractéristique est

$$\text{P}_\text{A} = \det(\text{A} - \text{XI}_2) = \text{X}^2 - \text{Tr}\,(\text{A})\text{X} + \det(\text{A}) = \text{X}^2 - 3\text{X} + 1$$

Les valeurs propres de A, racines du polynôme caractéristique, sont donc $(3 + \sqrt{5})/2$ et $(3 - \sqrt{5})/2$. Comme $\sqrt{5} < 3$, elles sont toutes les deux strictement positives. La question I.2 permet de conclure que

$$\boxed{\text{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \text{ et a fortiori } \text{A} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})}$$

> Si $\text{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \neq 0$, on peut calculer directement
>
> $${}^t\text{X}\,\text{AX} = 2{x_1}^2 - 2x_1x_2 + {x_2}^2 = {x_1}^2 + (x_1 - x_2)^2 > 0$$
>
> donc A est symétrique définie positive.
>
> Un troisième méthode serait la suivante. Dans un premier temps, remarquer que A est symétrique réelle, donc diagonalisable en base orthonormée. Notons λ et μ ses valeurs propres, sans chercher à les calculer. On sait que ce sont des réels non nécessairement distincts, qui vérifient $\text{Tr}\,(\text{A}) = \lambda + \mu$ et $\det(\text{A}) = \lambda\mu$. Le calcul du déterminant $\det(\text{A})$ montre qu'il est strictement positif et celui de la trace $\text{Tr}\,(\text{A}) = 2 + 1 \geqslant 0$. Ceci entraîne d'une part que les deux valeurs propres vérifient $\lambda\mu > 0$. Elles sont donc du même signe et d'autre part $\lambda + \mu \geqslant 0$ montre que ce signe est positif. On conclut alors à l'aide la question I.2.

I.4 La matrice B est symétrique. En posant $\text{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on remarque que

$${}^t\text{X}\,\text{BX} = -1 < 0$$

Donc
$$\boxed{\text{B} \notin \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \text{ a fortiori } \text{B} \notin \text{S}_n^{++}(\mathbb{R})}$$

> On peut aussi utiliser la question I.2 et dire que -1 étant valeur propre « évidente », B ne peut être définie positive.