Centrale Physique et Chimie MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Sébastien Dusuel (Professeur en CPGE) et Tiphaine Weber (Enseignant-chercheur à l'université); il a été relu par Stanislas Antczak (Professeur agrégé), Sandrine Brice-Profeta (Professeur agrégé en école d'ingénieur), Julien Dumont (Professeur en CPGE) et Thomas Tétart (ENS Cachan).

Ce problème, intitulé « Le Seigneur des Anneaux », s'intéresse à des aspects physiques et chimiques ayant trait à la planète aux anneaux bien connus, Saturne.

- La première partie porte sur l'un des nombreux mystères qu'offrent aux astrophysiciens les planètes géantes gazeuses, en particulier Saturne et Jupiter : elles rayonnent plus d'énergie qu'elles n'en reçoivent du Soleil. Après un peu de statique des fluides utilisant l'analogie électrostatique-gravitation et permettant de se faire une idée approximative de la structure interne de Saturne, la partie I.A aborde le calcul de sa température de surface. La différence importante entre la température théorique ainsi obtenue et celle que l'on mesure est la motivation de la partie I.B. La luminosité « excessive » de Saturne y est expliquée par la théorie de la « pluie d'hélium », qui dissipe de l'énergie par frottements avec l'hydrogène métallique liquide, dans lequel l'hélium est insoluble. C'est l'occasion d'étudier une analogie entre courants électrique et massique.
- La deuxième partie s'intéresse aux données obtenues sur le satellite Titan par la sonde Huygens. Elle fait intervenir l'ensemble du programme de chimie. De la thermodynamique d'une réaction de dissociation de l'ammoniac à la cinétique de la décomposition du méthane, les premières sous-parties permettent de décrire l'évolution de l'atmosphère de Titan. Les deux dernières sous-parties envisagent l'existence d'océans eau-ammoniac souterrains, par une approche cristallographique de la glace diamant puis par l'exploitation du diagramme binaire H_2O/NH_3 et le calcul du pH d'une telle solution. Cette partie ne présente pas de difficulté majeure mais elle est longue. Il ne faut pas hésiter, dès que c'est possible, à faire des approximations afin d'alléger les calculs.
- La dernière partie explique pourquoi les anneaux de Saturne sont circulaires, localisés dans le plan équatorial de la planète et étendus radialement. Ces questions demandent de maîtriser la mécanique du point (en particulier les mouvements à force centrale) et des systèmes, ainsi que le principe de superposition. Un développement quadrupolaire, introduit de façon didactique (cette notion étant hors-programme), est demandé dans la sous-partie III.B. La difficulté essentielle de cette partie réside dans la compréhension de l'énoncé : les textes introductifs des sous-parties ne sont pas toujours limpides.

Bien que ce sujet soit intéressant et de difficulté raisonnable, on peut regretter son manque de précision et de clarté, en particulier dans la troisième partie ; il n'est pas toujours aisé de comprendre quelles approximations sont implicitement faites.

De plus amples renseignements sur les sondes Cassini-Huygens et les programmes scientifiques associés sont disponibles en ligne :

`http://saturne.jpl.nasa.gov` (en anglais)
`http://www.cnes.fr/web/CNES-fr/323-cassini-huygens.php` (en français)

Indications

- I.A.3.a Commencer par montrer que $\rho\,\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{P}$.
- I.A.4.b On peut utiliser la conservation de l'énergie pour calculer la puissance surfacique atteignant Saturne et la multiplier par la surface qui l'intercepte.
- I.A.4.c Écrire l'équilibre radiatif de Saturne.
- I.B.2 Où se situent les gouttelettes qui vont traverser $\text{d}\overrightarrow{\text{S}}$ pendant $\text{d}t$?
- I.B.3.b Que vaut la puissance volumique de la force de Lorentz ?
- I.B.3.c La question est plutôt mal posée. Utiliser la question I.B.3.a pour calculer la puissance dissipée. Écrire ensuite un bilan de puissance, en prenant en compte les deux sources d'énergie de Saturne : le Soleil et la pluie d'hélium.
- II.A.4 L'approximation d'Ellingham permet de calculer $\Delta_\text{r}\text{G}^\circ$ en négligeant les variations de $\Delta_\text{r}\text{H}^\circ$ et $\Delta_\text{r}\text{S}^\circ$ en fonction de la température.
- II.A.5.a Exprimer les pressions partielles à l'équilibre en fonction de α.
- II.B.3.b Intégrer la loi de vitesse obtenue à la question précédente. Le rapport des concentrations $[CH_4]\,/\,[C_2H_2]$ est égal au rapport des abondances molaires de ces deux composés dans l'atmosphère.
- II.D.1 Discuter des encombrements relatifs des doublets liants et non liants autour de l'atome central.
- II.D.3 Afin de former des liaisons hydrogène, les atomes d'hydrogène se trouvent entre les atomes d'oxygène les plus proches.
- II.D.4 Pour dénombrer les molécules contenues dans une maille, compter les barycentres de ces molécules à l'intérieur de la maille. Pour l'eau, cela revient à décompter les atomes d'oxygène sur le schéma de la question II.D.2.
- II.D.5 La distance entre deux atomes d'oxygène adjacents vaut $d_1 + d_2$.
- II.E.4.a La température normale d'ébullition d'un corps pur est la température pour laquelle ce composé bout, sous la pression atmosphérique.
- II.E.4.c Modifier la composition du mélange à température constante revient, sur le diagramme binaire, à se déplacer le long d'une horizontale. Il faut ajouter assez d'ammoniac pour avoir la première bulle de vapeur.
- II.E.4.d Utiliser le théorème des moments chimiques.
- III.A.1 Utiliser le théorème de König, ainsi que les résultats de mécanique du point pour un mouvement à force centrale.
- III.A.2 L'énergie mécanique totale E_m est la somme de l'énergie cinétique barycentrique E_c^* et de l'énergie mécanique $\mathscr{E}_\text{m} = -\mathscr{G}\,\text{M}_\text{Sa}\text{M}/(2a)$ associée au mouvement du barycentre G du nuage dans le champ gravitationnel de Saturne. Exprimer le demi-grand axe a en fonction de e.
- III.A.3 Comment évolue l'énergie mécanique du système ?
- III.B.3.b Commencer par développer $\text{V}(r,\alpha)$ à l'ordre deux en b/r.
- III.B.4 Considérer la trajectoire comme circulaire.
- III.C.1 Établir l'expression de la vitesse v_0 d'un point de l'anneau. L'énergie cinétique barycentrique n'intervient plus ici.
- III.C.2 Procéder comme à la question précédente pour trouver $v(r)$. En déduire le moment cinétique et l'énergie mécanique par intégration. Trouver le lien entre σ et M pour éliminer σ.
- III.C.3.a Qu'implique $\text{L}_{\text{O orb}} = \text{L}'_\text{O}$?
- III.C.3.b On aura plutôt avantage à exprimer $\Delta\text{E}_\text{m}/\text{E}_\text{m}$ en fonction de X uniquement.

Le Seigneur des Anneaux

I. Bilan radiatif de Saturne

I.A.1 La masse volumique moyenne de Saturne vaut

$$\boxed{\rho = \frac{3\,\mathrm{M_{Sa}}}{4\,\pi\,\mathrm{R_{Sa}}^3} = 689\ \mathrm{kg.m^{-3}}}$$

Saturne étant composée d'éléments légers comme l'hydrogène et l'hélium, elle est en moyenne moins dense que l'eau liquide.

> Tout comme les données de l'énoncé, les applications numériques sont fournies avec trois chiffres significatifs.
>
> On aurait aussi pu comparer la masse volumique de Saturne à celle de la Terre, à condition de se souvenir que cette dernière a un rayon moyen de $6{,}37.10^6$ m et une masse de $5{,}97.10^{24}$ kg. L'application numérique donne $\rho_{\mathrm{Terre}} = 5{,}51.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, soit huit fois plus que la masse volumique de Saturne. En fait, Saturne est la seule planète du système solaire à être moins dense que l'eau liquide. Jupiter, qui est aussi une géante gazeuse, a une masse volumique de $\rho_{\mathrm{Jupiter}} = 1{,}24.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, valeur qu'on peut calculer avec les données de l'énoncé, en remarquant tout de même que Jupiter a un rayon (équatorial) de $7{,}15.10^7$ m et non de $7{,}15.10^7$ km. Quant au Soleil, étoile du système solaire, ces mêmes données fournissent $\rho_{\mathrm{Soleil}} = 1{,}42.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}$, valeur à nouveau supérieure à celle de l'eau liquide.

I.A.2 Si la masse est supposée uniformément répartie, la distribution de masse est à symétrie sphérique, ce qui implique que $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) = g(r)\,\overrightarrow{u_r}$. L'analogie électrostatique-gravitation permet d'écrire, pour le théorème de Gauss,

$$\oiint_{\mathcal{S}} \overrightarrow{g}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{S}} = -4\pi\,\mathscr{G}\,\mathrm{M_{int}}$$

où $\mathrm{M_{int}}$ est la masse intérieure à la surface fermée $\mathcal{S}$. Choisissons comme surface de Gauss $\mathcal{S}$ la sphère de rayon $r < \mathrm{R_{Sa}}$, pour obtenir

$$4\pi\,r^2 g(r) = -4\pi\,\mathscr{G}\,\rho\,\frac{4}{3}\pi\,r^3 = -4\pi\,\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}\left(\frac{r}{\mathrm{R_{Sa}}}\right)^3$$

puis
$$\boxed{\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) = -\frac{\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}}{\mathrm{R_{Sa}}^3}\,r\,\overrightarrow{u_r}}$$

À la surface de Saturne, la formule précédente fournit (en norme)

$$\boxed{g_0 = -g(\mathrm{R_{Sa}}) = \frac{\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}}{\mathrm{R_{Sa}}^2} = 11{,}2\ \mathrm{m.s^{-2}}}$$

> La notation $\overrightarrow{g}(r)$ de l'énoncé est à proscrire, car le champ de gravitation $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{r}) = g(r)\,\overrightarrow{u_r}$ ne dépend pas que de r, puisque $\overrightarrow{u_r}$ dépend de θ et ϕ en coordonnées sphériques.

Qui plus est, l'énoncé confond à tort champ de pesanteur et champ de gravitation, probablement sous prétexte que le référentiel lié à Saturne est supposé galiléen. Or, ce n'est pas le cas en pratique puisque Saturne tourne sur elle-même avec une période $\mathrm{T} = 10$ h 47 min. Par conséquent, toujours dans l'approximation (grossière) d'une distribution de masse à symétrie sphérique, le champ de pesanteur à l'équateur vaut

$$g_0 - \mathrm{R_{Sa}}\left(\frac{2\pi}{\mathrm{T}}\right)^2 = 9{,}68\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

soit une correction de près de 14% ! La prise en compte de la non-sphéricité de Saturne modifierait sans aucun doute ce résultat, mais on se contente ici d'utiliser le modèle suggéré dans l'énoncé.

I.A.3.a La symétrie sphérique de la distribution de masse montre que le champ de pression ne dépend que de r. La loi de la statique des fluides $\overrightarrow{\mathrm{F_V}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}$ ne met ici en jeu que la force volumique correspondant à la gravitation, soit $\rho\,\overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{r}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{P}$. La seule relation non triviale qui en découle vient de la projection sur $\overrightarrow{u_r}$

$$-\rho\,\frac{\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}}{\mathrm{R_{Sa}}^3}\,r = \frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}r}$$

dont l'intégration par rapport à r, avec la condition $\mathrm{P(R_{Sa})} = 0$, fournit

$$\boxed{\mathrm{P}(r) = \frac{\rho\,\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}}{2\,\mathrm{R_{Sa}}^3}\left(\mathrm{R_{Sa}}^2 - r^2\right) \qquad \text{pour} \qquad r < \mathrm{R_{Sa}}}$$

Dans ce modèle (grossier), la pression au centre de Saturne a une valeur de $\mathrm{P}(0) = \dfrac{\rho\,\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}}{2\,\mathrm{R_{Sa}}} = 225$ GPa. Ceci justifie de négliger la pression en surface.

I.A.3.b L'hydrogène métallique existe pour $r < r_{\text{mét}}$ tel que

$$\mathrm{P_{mét}} = \frac{\rho\,\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}}{2\,\mathrm{R_{Sa}}^3}\left(\mathrm{R_{Sa}}^2 - {r_{\text{mét}}}^2\right)$$

soit

$$\boxed{r_{\text{mét}} = \mathrm{R_{Sa}}\sqrt{1 - \frac{2\,\mathrm{R_{Sa}}\mathrm{P_{mét}}}{\rho\,\mathscr{G}\,\mathrm{M_{Sa}}}} = 1{,}93.10^7\ \mathrm{m}}$$

Cette valeur correspond à 33,1% du rayon de Saturne.

I.A.4.a D'après la loi de Stefan, le Soleil émet une puissance surfacique $\sigma\,{\mathrm{T_S}}^4$, qu'on multiplie par la surface $4\pi\,{\mathrm{R_S}}^2$ du Soleil pour obtenir la puissance totale émise

$$\boxed{\Phi_0 = 4\pi\,\sigma\,{\mathrm{R_S}}^2\,{\mathrm{T_S}}^4 = 3{,}64.10^{26}\ \mathrm{W}}$$

I.A.4.b Par conservation de l'énergie, la puissance surfacique rayonnée par le Soleil à la distance d_{SaS} a pour expression $\dfrac{\Phi_0}{4\pi\,{d_{\mathrm{SaS}}}^2}$. Saturne intercepte cette puissance surfacique sur une surface $\pi\,\mathrm{R_{Sa}}^2$ et par conséquent

$$\boxed{\Phi_{\mathrm{abs}} = a\,\Phi_0\left(\frac{\mathrm{R_{Sa}}}{2\,d_{\mathrm{SaS}}}\right)^2}$$