Mines Maths 2 MP 2009 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Alexis Gryson (ENS Cachan) ; il a été relu par Gilbert Monna (Professeur en CPGE) et Laetitia Borel-Mathurin (ENS Cachan).

L'épreuve se compose d'une question préliminaire et de six parties. La question préliminaire et les quatre premières parties de ce problème sont indépendantes.

- La question préliminaire montre que la famille (infinie) des fonctions puissances (sur $\mathbb{R}_+^*$) est libre.
- Dans la première partie, on calcule un déterminant de Cauchy. Cette section présente des résultats dont la preuve comporte plusieurs difficultés techniques.
- On prouve dans la deuxième partie que la distance d'un point d'un espace vectoriel normé E à un sous-espace vectoriel de dimension finie est atteinte.
- On considère dans la troisième partie le cas d'un espace euclidien. On démontre une formule importante, qui donne la distance d'un point à un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace euclidien comme quotient de déterminants de Gram.
- La quatrième partie compare les normes N_2 et N_∞ sur l'espace $\mathrm{C}([0,1])$ des fonctions continues à valeurs réelles sur $[0,1]$. On obtient un critère pour qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathrm{C}([0,1])$ soit dense au sens des deux normes étudiées.
- La cinquième partie utilise les résultats précédents pour donner une condition nécessaire et suffisante de densité d'un espace vectoriel W, qui est engendré par une famille de fonctions puissances dans $\mathrm{C}([0,1])$ muni de la norme N_2.
- La dernière partie adapte les résultats de la partie précédente au cas de la norme N_∞ pour prouver le théorème de Müntz, une généralisation du théorème de Weierstrass.

La question préliminaire et les quatre premières parties de ce sujet sont de facture assez classique et mettent principalement à contribution des résultats d'algèbre linéaire, d'algèbre bilinéaire et de topologie des espaces vectoriels normés de dimension quelconque. Ce sujet est particulièrement adapté pour la révision des chapitres portant sur les calculs de déterminants et la topologie des espaces vectoriels normés. Les deux dernières parties, plus originales, relèvent de la théorie de l'approximation.

Indications

1 Considérer des n-uplets de réels ordonnés $(\lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. Remarquer ensuite que l'une des fonctions joue un rôle prépondérant au voisinage de zéro.

Partie A

2 Calculer le déterminant suggéré par l'énoncé de deux façons différentes : d'une part, en développant par rapport à la dernière colonne et d'autre part, en utilisant la forme de la décomposition en éléments simples de R.

3 Remarquer que l'existence de la décomposition en éléments simples, énoncée à la question précédente pour R, entraîne que les b_k sont deux à deux distincts. Calculer ensuite le coefficient A_n dans la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle R, puis raisonner par récurrence.

Partie B

5 Noter que pour tout n, $d(x,\mathrm{A}) \leqslant d(x,\mathrm{A}_n)$, puis majorer $d(x,\mathrm{A}_n)$ à l'aide de $d(x,\mathrm{A})$ en utilisant la définition de la distance en tant que borne inférieure.

6 Utiliser le fait que tout sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé E est fermé.

7 Se rappeler qu'une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes ; puis, utiliser le résultat de la question précédente.

Partie C

8 Utiliser le théorème de Pythagore dans un espace vectoriel euclidien.

10 Faire apparaître par des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes la différence entre x et son projeté orthogonal sur V dans le déterminant de Gram $\mathrm{G}\,(x_1, x_2, \ldots, x_n, x)$, et développer celui-ci par rapport à la dernière colonne.

Partie D

11 Utiliser la caractérisation séquentielle de l'adhérence.

12 Considérer une suite de fonctions continues affines par morceaux $(\psi_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\psi_n(0) = 0$ et $\psi_n\big|_{\left[\frac{1}{n}\,;1\right]} = 1$.

15 Faire appel au théorème de Weierstrass.

16 Utiliser les résultats des questions 11 et 15.

Partie E

17 Utiliser les résultats des questions 4, 5 et 16.

18 Calculer pour $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}_+^2$ le produit scalaire $(\phi_\alpha|\phi_\beta)$. Calculer les déterminants $\mathrm{G}\,(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_n})$ et $\mathrm{G}\,(\phi_{\lambda_0}, \phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_n}, \phi_\mu)$, puis utiliser la question 10.

19 Remarquer que l'hypothèse $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$ entraîne que pour tout $\mu \geqslant 0$,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{|\mu-\lambda_k|}{\lambda_k+\mu+1} = 1$$

20 Traiter séparément le cas où la suite $(\lambda_k)_{k\geqslant 0}$ ne tend pas vers $+\infty$. Dans le cas où $\lim\limits_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$, utiliser le résultat suivant : soit une suite de réels strictement positifs $(u_k)_k$, la suite de terme général $\prod_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite nulle si et seulement si la série $\sum \ln u_k$ diverge vers $-\infty$.

Partie F

21 La question 11 permet de comparer l'adhérence de W au sens des normes étudiées.

22 Écrire la fonction $f = \phi_\mu - \psi$ sous forme intégrale à l'aide de sa dérivée, puis utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

23 Adapter le résultat de la question 20 à la suite de réels $(\lambda_k - 1)_{k\geqslant 1}$ et utiliser la majoration établie à la question 22.

24 Prouver le fait suivant : pour toute fonction f de $\mathrm{C}([\,0\,;1\,])$ et pour tout réel strictement positif α, $\mathrm{N}_\infty(f) = \mathrm{N}_\infty(f \circ \phi_\alpha)$. Enfin, appliquer le résultat de la question précédente à la suite $(\lambda_k/\beta)_k$, avec $\beta = \inf_{\ell\geqslant 1} \lambda_\ell$.

Les conseils du jury

Le rapport de jury insiste sur le fait que les notions de topologie, intervenant constamment dans le problème, ont semblé décontenancer bon nombre de candidats, à un point tel que « les résultats de cette épreuve révèlent une profonde méconnaissance de résultats fondamentaux tels que le théorème de Pythagore ou le fait qu'une boule ne soit pas un sous-espace vectoriel. » Même si « la topologie n'est pas le domaine de prédilection des candidats au concours », un tiers des questions « relevaient directement du cours » ce qui a permis « à des candidats sérieux d'obtenir une note honorable ».

Concernant la rédaction des copies, les correcteurs ont apprécié et récompensé l'honnêteté (les démonstrations partielles ou les calculs « arrangés » pour aboutir au résultat de l'énoncé sont jugés inutiles), la clarté (« les dessins (bienvenus en géométrie euclidienne) – sans pour autant se substituer à une démonstration – [...] ont probablement aidé les candidats dans leur démarche ») et la concision.

Question préliminaire

1 Montrons par récurrence que la propriété :

$\mathscr{P}(n)$: « Pour tout n-uplet de réels positifs distincts $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, la famille $(\phi_{\lambda_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre. »

est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

- $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque pour tout $\lambda \geqslant 0$, la fonction ϕ_λ est non nulle.
- $\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)$: Soit $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ un $n+1$-uplet de réels positifs distincts que l'on suppose ordonnés dans l'ordre décroissant sans perte de généralité, soit

$$0 \leqslant \lambda_{n+1} < \lambda_n < \ldots < \lambda_1$$

Soit $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n+1}$ un $n+1$-uplet de réels vérifiant

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k \phi_{\lambda_k} = 0$$

Alors, $$\forall x \in [\,0\,;1\,] \qquad \sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k} = 0$$

et on multiplie cette expression pour $x > 0$ par $x^{-\lambda_{n+1}}$. Cela donne en passant à la limite

$$\lim_{x\to 0} \left(\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^{\lambda_k - \lambda_{n+1}} \right) = a_{n+1} = 0$$

et par conséquent, $$\sum_{k=0}^{n} a_k \phi_{\lambda_k} = 0$$

et tous les $(a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ sont nuls par hypothèse de récurrence.

- Conclusion :

> Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout n-uplet de réels positifs distincts $(\lambda_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, la famille $(\phi_{\lambda_k})_{1\leqslant k\leqslant n}$ est libre.

Le rapport de jury rappelle que, « par définition, une famille infinie de vecteurs est libre si toute famille *finie* de cette famille est libre. Les candidats qui partaient d'une série, ou d'une vague relation $\sum a_\lambda x^\lambda$, non seulement ne respectaient pas la définition du cours, mais introduisaient de plus le problème de l'existence de la somme écrite. »